

COMPORTAMIENTO DE LOS RECURSOS PRODUCTIVOS CONSIDERADOS "VARIABLES" EN LAS EMPRESAS VITICOLAS

Area de San Rafael Mendoza — Argentina

* LUIS H. HERNÁNDEZ
** ERNESTO MAVRICH
*** GRACIELA FASCILO
DE BAGINI

1. SUMMARY

The properties that make-up the sample, are representatives of agricultural enterprises whose sole activity is the viticulture in a marketable production.

The production resources considered are named as variables, i.e. those that in a great measure can be managed by the producer during the yielding process.

The methodology applied is based on the marginalist theory. The mathematical expression obtained (production function) results from the application of the Cobb-Douglas function.

From the results of the analysis, we can assume that the factor "effective hand labor" is the variable resource with the highest coefficient of marginal productivity, upon which it rests all the responsibility of the producing process.

The resource "cultural expense" has a coefficient of marginal productivity, which is slightly higher than the unit on the average of the sample.

As to the resource "equipment expenses", its marginal productivity is on the average nearly zero; moreover, its activity in the producing system, tends to diminish the production.

Introducción: El presente estudio deriva del trabajo original titulado "Análisis Económico de la Empresa Agropecuaria — Area de San Rafael — Mendoza — Argentina" (1) que tuvo como finalidad el diagnóstico de los problemas internos relacionados con la explotación de las empresas agrarias del área.

Las conclusiones obtenidas en ese primer intento de estudio económico global a nivel de área, ha comprometido a los autores a proseguir las investigaciones, convencidos de que sus resultados represen-

* Investigador en Economía Agraria.

** Profesor Titular Efectivo de la cátedra Cálculo Estadístico y Biometría.

*** Auxiliar de docencia.

tarán una contribución positiva en la búsqueda de soluciones aceptables para los problemas económico-sociales planteados en la región.

La información proporcionada por este primer trabajo planteó una serie de interrogantes que, para contestarlos, hacía necesario un estudio más minucioso de la información disponible. De acuerdo con un orden de prioridades, se concretó el estudio del recurso que más interés había despertado en la etapa de diagnóstico. Ese estudio consistía en conocer el comportamiento del recurso mano de obra en viñedos, en cuanto a su productividad bruta y neta. (2).

Como es lógico suponer, las conclusiones derivadas de ese trabajo crearon nuevas inquietudes que han permitido justificar el presente estudio. Una de ellas se refiere al posible comportamiento de la mano de obra cuando se halla asociada con otros recursos igualmente productivos. Para realizar esta investigación, el camino más adecuado consiste en encarar un estudio donde la mano de obra forme parte de un sistema o función de producción múltiple e integrado por todas las variables cuantificables.

Como los datos disponibles se refieren a empresas cuya única actividad es la viticultura en estado de producción, esto significa que la mayor parte de las inversiones fijas ya están realizadas, lo cual representa una situación que en gran medida es inalterable en un corto plazo. Planteada así la situación, se ha creído conveniente, por el momento, limitar este estudio al conocimiento del comportamiento de los recursos variables, entendiendo por éstos a los recursos que puedan ser manejados por el productor durante el proceso productivo y que además influyen cuali-cuantitativamente sobre el nivel de producto a obtener.

La importancia de este conocimiento radica en que el mismo puede hacer variar sustancialmente el resultado del proceso productivo, mejorando cuali-cuantitativamente la producción o disminuyendo los gastos de explotación, o ambas cosas a la vez. Esto se traduce al final del ejercicio en la obtención de más altos beneficios económicos. Además cuando las circunstancias así lo exigen, su sola presencia permite asegurar la continuidad de la actividad productiva, siempre y cuando la productividad que generen cubran por lo menos los costos derivados de su utilización.

En un momento de crisis, cuando las disponibilidades financieras son escasas o nulas, o cuando las relaciones de precios de insumo-producto son desfavorables, situaciones por demás comunes en el medio, es conveniente aprovechar al máximo los recursos variables disponibles, especialmente los de más alta productividad. Previamente es indispensable conocer el comportamiento de los mismos. Este objetivo es el que se pretende alcanzar con el presente trabajo, en la seguridad de que las conclusiones que se obtengan contribuirán a ayudar al productor a tomar sus propias decisiones.

2. OBJETIVOS

- 2.1. Probar metodologías de cálculo y análisis.
- 2.2. Obtener funciones de producción que involucren a los recursos variables cuantificables.
- 2.3. Determinar los niveles óptimos de uso de los recursos variables seleccionados.
- 2.4. Obtener los correspondientes coeficientes de insumo-producto, de utilidad en una futura etapa de programación.
- 2.5. Utilizar los resultados obtenidos como ejemplos didácticos en la enseñanza.

3. METODOLOGIA

La metodología seguida configura un orden de acción que tiende a alcanzar los objetivos prefijados. Este orden, a su vez, se fundamenta en el supuesto de que todo proceso productivo en agricultura cumple la ley de los rendimientos decrecientes o ley de las proporciones variables.

La productividad de los recursos tiene su expresión en el producto obtenido y se representa por medio de una relación denominada: de insumo-producto, recurso-producto o de input-output, que expresa las proporciones que se establecen entre el producto (Y) y el recurso (Xi), cuando éste varía cuantitativamente. Se simboliza $\frac{Y}{Xi}$, y se denomina razón o tasa media.

Cuando se efectúa el cociente entre los incrementos de las dos variables $\frac{\Delta Y}{\Delta Xi}$, se obtiene la razón incremental.

La tasa instantánea, $\frac{dY}{dXi}$, da la productividad marginal.

Cuando se estudia un solo recurso, la relación cuantitativa puede representarse gráficamente mediante una curva, en un sistema de ejes coordenados ortogonales. En el eje horizontal se indican los valores del insumo X y en el vertical, los del producto, Y. En cada uno de los puntos de la curva se puede establecer el cociente Y/X, entre las coordenadas de los mismos.

Cuando se tiene en cuenta la razón de cambio $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$, ésta es distinta según sea el rendimiento constante, creciente o decreciente.

En el primer caso, se expresa mediante una relación lineal entre el insumo y el producto y se representa por la ecuación de la recta: $Y = a + b X$, que indica que existe una relación constante entre producto y recurso.

En los casos de rendimiento a una tasa creciente o decreciente, la relación es curvilínea y puede expresarse mediante una ecuación del tipo: $Y = a X^b$, que define relaciones no proporcionales entre producto y recurso.

El primer objetivo que se persigue consiste en encontrar la ecuación matemática que exprese las relaciones de insumo-producto de todas y cada una de las variables seleccionadas con el producto final. Esta expresión matemática explica una relación de dependencia entre el producto final (Y), denominado variable dependiente, y cada uno de los recursos variables (X_i), variables independientes, expresión que se define como una "función de producción".

Una "función de producción" es una relación matemática que explica en qué forma la cantidad de un producto depende de las cantidades de recursos utilizados, se simboliza así: $Y = f(X_i)$ e indica que la clase y cantidad de un producto "depende de" (son función de) la clase y cantidad de recursos utilizados.

"Una función de producción informa acerca de la cantidad de producto que podemos esperar cuando combinamos los insumos de cierta manera. Las propiedades físicas, químicas y biológicas de los insumos determinan las clases y cantidades de producto que recibiremos cuando combinemos los insumos en tal forma...". (3)

De aquí en adelante todo el interés estará concentrado en encontrar esta expresión matemática, ya que la misma, explicará la relación funcional existente entre el producto y los recursos considerados.

La metodología a aplicar tiende a encontrar el valor de los coeficientes de regresión para cada función de producción planteada. Practicados los ajustes estadísticos necesarios se estará en condiciones de perseguir el logro de los demás objetivos.

Se ha hablado de las consideraciones de tipo físico, químico y biológico que rigen un proceso productivo. Quedan por considerar las de tipo económico, que en definitiva harán decidir al productor el elegir entre varias alternativas de producción (funciones de producción). Para ello es necesario introducir los conceptos de precios, de insumo-producto y estudiar el comportamiento de las distintas funciones de producción dentro de los límites económicos dado por la relación de precios.

Si se parte del supuesto de que los precios no varían, cualquiera sea el nivel de uso de los recursos o de producto, es lógico suponer que entre la gama de pares de valores (insumo-producto) habrá uno, que por razones económicas es el más recomendable. Esta relación se conoce como "óptimo económico" y se da cuando se establece el siguiente equilibrio:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X_i} = \frac{P_{X_i}}{P_y} \text{ o también } \Delta Y \cdot P_y = \Delta X_i \cdot P_{X_i}$$

Esto significa que el óptimo se alcanza cuando el último incremento del producto por su precio se iguala al último incremento del recurso por su precio. Determinada la situación de equilibrio se está en condiciones de calcular el "máximo beneficio" para esa situación.

Existen infinidad de posibles combinaciones de insumo-producto y por ende de funciones de producción, con sus correspondientes puntos óptimos, representando cada una, una posible "alternativa" de producción. Resta por lo tanto seleccionar entre las distintas "alternativas" aquella que permite obtener el máximo beneficio bruto.

La metodología aplicada se verá con claridad a medida que el trabajo se vaya desarrollando, sin entrar en lo posible a discutir los principios teóricos que la fundamentan. La bibliografía recomendada es suficiente para aclarar cualquier duda o ampliar conocimientos.

4. LIMITACIONES

Las limitaciones que se imponen a este tipo de trabajo son debidas, principalmente, a la imposibilidad de tener en cuenta todas las variables de origen físico, químico y biológico que intervienen en un proceso productivo agrícola y que escapan al control del productor y a la capacidad de apreciación del investigador.

5. VARIABLES SELECCIONADAS

Y = "Producción de uva", expresada en qq por Ha cultivada.

X_1 = "Mano de obra efectiva", expresada en jornadas (8 horas de labor) por Ha cultivada de viñedo. Se dicen efectivas por ser las verdaderamente utilizadas durante el proceso productivo.

X_2 = "Gastos en efectivo", expresado en m\$.n. Comprende todas las erogaciones en efectivo realizadas durante el proceso productivo en concepto de:

X_{2a} = "Gastos de cultivo", erogaciones realizadas por compra de plaguicidas, abonos, reposición de plantas, etc., excepto salarios.

X_{2b} = "Gastos de equipo", erogaciones por compra de forraje para la alimentación de los animales de labor, pago por arriendo de maquinarias, compra de combustibles y lubricantes y reparaciones.

X_{2bI} = "Gastos de equipo de tracción a sangre", erogaciones principalmente en concepto de alimentación de animales de trabajo.

X_{2bII} = "Gastos de equipo de tracción mecánica", erogaciones en concepto de combustibles, lubricantes y reparaciones.

El ordenamiento propuesto indica el camino seguido posteriormente y que consiste en ir obteniendo distintas funciones de producción partiendo de la forma más simple, y por incorporación sucesiva de variables independientes llegar a obtener expresiones matemáticas más complejas.

6. PROCESO ANALITICO

La base del proceso analítico descansa en la aplicación de la expresión matemática: $Y = a \cdot X_1^{b1} \cdot X_2^{b2} \dots X_n^{bn}$, ecuación de la función potencial, más conocida con el nombre de Función de Cobb Douglas.

De todas las funciones conocidas, la de Cobb-Douglas es la que más se aplica en investigaciones relacionadas con la producción agrícola.

Dice, E. Gómez Manzanares respecto a las Funciones de Cobb-Douglas; (⁴)

"... Son, sin duda alguna, las más utilizadas, sobre todo en estudios de porte macroeconómico, cuando se trata de caracterizar la producción agrícola de una región o de un país..."

Entre las características y ventajas de la aplicación de la función de Cobb-Douglas, podemos citar:

a) Su facilidad de expresarse mediante una función lineal, previa transformación logarítmica, la cual la hace sumamente práctica en su aplicación.

b) La posibilidad de obtener directamente las elasticidades parciales y total a través de los coeficientes de regresión, la caracterizan como una función de elasticidad constante. Hecho éste íntimamente ligado a la "economía de escala" y de ahí su importancia.

c) Y siempre, las productividades marginales correspondientes a cada recurso son decrecientes.

6.1. Mano de obra (X_1) y Producción (Y)

$$Y = f(X_1)$$

La primera relación estudiada comprende a las variables: Y (qq de uva por Ha. cultivada) y X_1 (jornadas efectivas por Ha. cultivada con vid).

Los casos estudiados fueron 31, valor éste que comprende a todos los predios cuya única actividad es la vitícola.

El coeficiente de correlación simple curvilínea hallado es $r=0,671$, valor significativo para el nivel de 0,01 de probabilidad.

El coeficiente de determinación es $r^2=0,45$, indicando que el 45% de las variaciones de la producción final están explicadas por variaciones en el volumen utilizado de mano de obra efectiva. El 55% restante de las variaciones son explicadas por los otros recursos no considerados.

La resolución del siguiente sistema de ecuaciones permite calcular los coeficientes a y b .

$$\begin{aligned} 58,74943 &= 31 a + 53,03056 b_1 \\ 101,32651 &= 53,03056 a + 91,82520 b_1 \end{aligned}$$

Siendo: $a = 0,61852$ y $b_1 = 0,74626$

La expresión logarítmica responde a la forma general:

$\log Y = \log. a + b_1 \log. X_1$, o también

$$y = A + b_1 x_1 = 0,61852 + 0,74626 x_1$$

en su forma potencial quedaría así:

$$Y = 4,154 X_1^{0,74626}$$

La elasticidad de esta función es $E = 0,746$, valor éste menor que la unidad. La productividad marginal del recurso mano de obra se calcula derivando la función hallada y es igual al valor adicional de la producción, al incrementarse el recurso mano de obra en una jornada.

El proceso para calcular la derivada de una función del tipo:

$Y = a. X^b$ es el siguiente:

$$Y' = a. b X^{b-1} \text{ o sea}$$

$$Y' = b. a X^b. X^{-1}, \quad (I)$$

como la expresión $a. X^b$, es la función Y , y X^1 , puede expresarse como

$\frac{1}{X}$ reemplazando en (I), se obtiene:

$$Y' = b \frac{Y}{X}$$

es decir que la derivada de una función potencial es igual al coeficiente de regresión multiplicado por el cociente del producto Y respecto al recurso variable X_1 .

Reemplazando en la ecuación de la derivada por los valores medios correspondientes a la muestra en estudio, tendremos:

$$\frac{dY}{dX_1} = 0,746 \cdot \frac{Y}{X_1} \text{ siendo } \left\{ \begin{array}{l} Y = 88,30 \text{ qq/Ha.} \\ X_1 = 56,52 \text{ jornadas/Ha. año} \\ P_Y = 462,50 \text{ m\$n/qq} \\ P_{X_1} = 200,00 \text{ m\$n/j} \end{array} \right.$$

Realizados los cálculos correspondientes, el valor hallado de productividad marginal es igual a 3,61 e indica que la productividad marginal del recurso mano de obra en la situación media, es mayor en más de tres veces y media al valor de la unidad, equivalente a una relación óptima.

Esta comprobación indicaría por sí misma la conveniencia de aumentar sustancialmente la escala de operaciones en el uso de la mano de obra hasta conseguir que la productividad marginal se iguale al valor uno, a fin de procurar un significativo aumento en los beneficios brutos totales. Conclusión válida, siempre y cuando la producción dependiere de la acción de este único recurso variable.

6.2. Mano de obra X_1 , Gastos en efectivo X_2 y Producción Y

$$Y = f(X_1, X_2)$$

La resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Slog. } Y = b_0 N + b_1 \text{ Slog. } X_1 + b_2 \text{ Slog. } X_2$$

$$S(\log X_1 \log Y) = b_0 \text{ Slog} X_1 + b_1 \text{ Slog} X_1^2 + b_2 S(\log X_1 \log X_2)$$

$$S(\log X_2 \log Y) = b_0 \text{ Slog} X_2 + b_1 S(\log X_1 \log X_2) + b_2 \text{ Slog} X_2^2$$

$$58,74943 = b_0 31 + b_1 53,03056 + b_2 112,60524$$

$$101,32651 = b_0 53,03056 + b_1 91,82520 + b_2 193,50160$$

$$214,37901 = b_0 112,60524 + b_1 193,50160 + b_2 412,95599$$

permite obtener los valores de:

$$b_0 = 0,45576 ; b_1 = 0,70562 ; b_2 = 0,08655$$

la siguiente es la expresión potencial de la función hallada:

$$Y = 2,856 \cdot X_1^{0,70562} \cdot X_2^{0,08655}$$

El coeficiente de correlación múltiple, que mide la asociación de Y con X_1 y X_2 es para $N = 31$, $R_{cy.x_1x_2} = 0,688$,

correspondiéndole un valor de $F = 12,56$, altamente significativo.

El coeficiente de determinación $R^2 = 0,473$, indica que el 47 % de las variaciones de la producción son explicadas por variaciones en el volumen utilizado de la mano de obra y de los gastos en efectivo. El 52,7% restante se explica por la acción de los recursos no considerados.

Las elasticidades parciales de los recursos mano de obra y gastos en efectivo son iguales a los respectivos coeficientes de regresión.

La elasticidad total es igual a la suma de las elasticidades parciales, $E_t = 0,79217$, menor que la unidad.

La significancia de los coeficientes b_1 y b_2 se determina por la prueba de t.

$$t = \frac{\text{Coef. regresión}}{\text{Error coef. regr.}} ; \text{ de lo que resulta:}$$

$$t_{b'_{yx_1.x_2}} = 3,649, \text{ altamente significativo (xx)}$$

$$t_{b'_{yx_2.x_1}} = 0,944, \text{ no significativo}$$

Los valores calculados indican que de los dos recursos considerados, solamente la mano de obra (X_1) influye significativamente en la obtención del producto final.

La productividad marginal de los recursos mano de obra y gastos en efectivo en la medida de la muestra, se obtiene mediante la aplicación del procedimiento ya visto en el punto 6.1 y que consiste en la derivación de la función hallada.

Siendo:

$$\frac{dY}{dX_1} = b_1 \frac{Y}{X_1} = 2,54 \quad , \text{ para } \begin{cases} \bar{Y} = 88,30 \text{ qq/Ha.} \\ \bar{X}_1 = 56,52 \text{ J/Ha. año} \\ P_y = 462,50 \text{ m\$n/qq.} \\ P_{x_1} = 200,00 \text{ m\$n/I} \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX_2} = b_2 \frac{Y}{X_2} = 0,60 \quad , \text{ para } \bar{X}_2 = 5.859 \text{ m\$n/Ha.}$$

La productividad marginal de la mano de obra en la media de la muestra es dos veces y media superior al valor óptimo que es la

unidad. A pesar de seguir siendo alta, la productividad marginal de la mano de obra hallada es inferior a la correspondiente $Y = f(X_1)$. Esta disminución plantea interrogantes que es necesario contestar, a medida que se avance en el análisis. No obstante, se puede seguir recomendando el aumento de la escala de operaciones en el uso del factor mano de obra hasta alcanzar la relación óptima, que es igual a la unidad y que indicará el nivel de máximo beneficio bruto.

Respecto a la productividad marginal obtenida para el recurso gastos en efectivo, válida para el valor medio del mismo en la muestra, igual a 0,60, indica la conveniencia de disminuir la escala de operaciones en el uso de este recurso, a fin de aumentar el beneficio bruto total, ya que en esta situación la inversión de un peso moneda nacional reditúa sesenta centavos.

6.3. Mano de obra (X_1) Gastos de cultivo (X_{2a}) y Producción (Y).

$$Y = f(X_1, X_{2a})$$

La baja productividad marginal encontrada para el recurso Gastos en efectivo (X_2) obliga a estudiar a este factor con mayor detenimiento. En la esperanza de encontrar la clave del problema en la estructura del recurso, es que se ha separado a éste en sus componentes X_{2a} y X_{2b} , a fin de estudiarlos individualmente.

El coeficiente de correlación múltiple curvilínea, que relaciona a las variables X_1 y X_{2a} con la producción Y, es $R_c = 0,669$ que para $N = 31$ le corresponde un valor de $F = 11,35$, altamente significativo. El coeficiente de determinación $R^2 = 0,45$, está indicando que el 45% de las variaciones en la producción final están explicadas por variaciones en el empleo de las variables consideradas.

La resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$58,74943 = b_0 \cdot 31 + b_1 \cdot 53,03056 + b_{2a} \cdot 96,75336$$

$$101,32651 = b_0 \cdot 53,03056 + b_1 \cdot 91,82520 + b_{2a} \cdot 166,05501$$

$$184,05624 = b_0 \cdot 96,75446 + b_1 \cdot 116,05501 + b_{2a} \cdot 306,23650$$

permite obtener el valor de:

$$b_0 = 0,469 ; b_1 = 0,710 ; b_{2a} = 0,072$$

La función de producción, en su forma potencial, es:

$$Y = 2,944 \cdot X_1^{0,710} \cdot X_{2a}^{0,072}$$

Las elasticidades correspondientes a cada variable son los respectivos valores de los coeficientes b_1 y b_{2a} . La elasticidad total es $Et = 0,782$, menor que la unidad. La significancia de los coeficientes de regresión parcial, obtenidos por la prueba de t , es para:

$$tb' y x_1 \cdot x_{2a} = 3,94, \text{ xx}$$

$$tb' y x_{2a} \cdot x_1 = 0,78, \text{ no x}$$

Nuevamente se comprueba que, de las variables estudiadas, solamente la mano de obra (X_1) influye significativamente en el resultado final.

Derivando la función obtenida, se ha calculado la productividad marginal de los recursos considerados, en los valores medios de la muestra.

$$\frac{dY}{dX_1} = b_1 \cdot \frac{Y}{X_1} = 0,71 \cdot \frac{88,30 \text{ qq. } 462,50 \$}{56,52J \cdot 200,00 \$}$$

$$\frac{dY}{dX_1} = 2,56$$

$$\frac{dY}{dX_{2a}} = b_{2a} \cdot \frac{Y}{X_{2a}} = 0,072 \cdot \frac{88,30 \text{ qq. } 462,50 \$}{1.943,54 \$}$$

$$\frac{dY}{dX_{2a}} = 1,51$$

La productividad marginal de la mano de obra poco ha variado respecto a la situación ya vista en 6.2., sigue siendo alta y es recomendable aumentar la escala de operaciones en el uso de este factor para conseguir un mayor beneficio total.

Respecto a la productividad del recurso Gastos de cultivo se observa, que ésta es superior en una vez y media a la óptima, significando que la inversión de un peso en gastos de cultivo reditúa en la situación promedio, un peso con cincuenta. A los efectos de aumentar el beneficio total por unidad de superficie, es recomendable intensificar los gastos de cultivo hasta alcanzar el óptimo equilibrio entre la productividad marginal y la relación de precios de insumo-producto.

Los cálculos correspondientes para hallar la situación ideal se dejarán para cuando se consideren todas las variables en una misma función.

Es importante destacar, antes de pasar a tratar el próximo punto, que el criterio seguido, de estudiar a los componentes de la variable Gastos en efectivo (X_2) en forma separada, es acertado, ya que es posible prever a esta altura del análisis que la causa de la baja productividad del recurso X_2 radica en su estructura. Los valores hallados de P.Mg. para X_2 y X_{2a} ponen en evidencia esa situación.

6.4. Mano de obra X_1 , Gastos de cultivo X_{2a} , Gastos de equipo X_{2b} y Producción Y.

$$Y = f X_1 X_{2a} X_{2b}$$

Los coeficientes de la función de producción se calculan por el método de la matriz inversa. (5)

La introducción de este método de cálculo se hace al solo efecto de cumplimentar el primer objetivo que se persigue con el trabajo, es decir, probar nuevas metodologías de cálculo y análisis.

Toda matriz que se multiplique por su inversa, es igual a la matriz identidad:

$$A \cdot A^{-1} = I, \quad (II)$$

donde A representa la matriz original, A^{-1} su matriz inversa y I la matriz identidad.

El cálculo de la matriz inversa permitirá obtener los coeficientes C_{ij} paso previo a la determinación de los coeficientes de regresión b_k . El método de cálculo seguido es el "largo" habiendo no obstante, métodos más cortos que podrían seguirse, como por ejemplo el "método abreviado de Doolittle".

Reemplazando en (II) tenemos:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Sx^2_1 & Sx_{1\ 2a} & Sx_{1\ 2b} \\ Sx_{1\ 2a} & Sx^2_{2a} & Sx_{2a\ 2b} \\ Sx_{1\ 2b} & Sx_{2a\ 2b} & Sx^2_{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (III)$$

Los elementos de la matriz A están representados por desvíos lo que permite resumir el cálculo. El producto de $A^{-1} \cdot A$ da origen a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{A)} \quad & C_{11} S_{x_1}^2 + C_{12} S_{x_1 x_{2a}} + C_{13} S_{x_1 x_{2b}} = 1 \\
 & C_{11} S_{x_1 x_{2a}} + C_{12} S_{x_{2a}}^2 + C_{13} S_{x_{2a} x_{2b}} = 0 \\
 & C_{11} S_{x_1 x_{2b}} + C_{12} S_{x_{2a} x_{2b}} + C_{13} S_{x_{2b}}^2 = 0 \\
 \text{B)} \quad & C_{21} S_{x_1}^2 + C_{22} S_{x_1 x_{2a}} + C_{23} S_{x_1 x_{2b}} = 0 \quad (\text{IV}) \\
 & C_{21} S_{x_1 x_{2a}} + C_{22} S_{x_{2a}}^2 + C_{23} S_{x_{2a} x_{2b}} = 1 \\
 & C_{21} S_{x_1 x_{2b}} + C_{22} S_{x_{2a} x_{2b}} + C_{23} S_{x_{2b}}^2 = 0 \\
 \text{C)} \quad & C_{31} S_{x_1}^2 + C_{32} S_{x_1 x_{2a}} + C_{33} S_{x_1 x_{2b}} = 0 \\
 & C_{31} S_{x_1 x_{2a}} + C_{32} S_{x_{2a}}^2 + C_{33} S_{x_{2a} x_{2b}} = 0 \\
 & C_{31} S_{x_1 x_{2b}} + C_{32} S_{x_{2a} x_{2b}} + C_{33} S_{x_{2b}}^2 = 1
 \end{aligned}$$

La resolución de cada uno de los sistemas de ecuaciones permite obtener la matriz inversa que, multiplicada por la matriz original da como resultado la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1,07122 & -0,07533 & -0,11126 \\ -0,07533 & 0,27063 & -0,04760 \\ -0,11126 & 0,04760 & 0,11236 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,10969 & 0,54261 & 1,32873 \\ 0,54261 & 4,25790 & 2,34110 \\ 1,32873 & 2,34110 & 11,20733 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V})$$

Obtenidos así los coeficientes C_{ij} se está en condiciones de calcular los coeficientes de regresión b_k^{ij} , para ello se sigue el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= C_{11} S_{x_1} y + C_{12} S_{x_1 x_{2a}} y + C_{13} S_{x_1 x_{2b}} y \\
 b_2 &= C_{12} S_{x_1} y + C_{22} S_{x_{2a}} y + C_{23} S_{x_{2a} x_{2b}} y \quad (\text{VI})
 \end{aligned}$$

$$b_3 = C_{13} S_{x_1} y + C_{23} S_{x_{2a} x_{2b}} y + C_{33} S_{x_{2b}} y \quad (\text{IV})$$

reemplazando se tiene:

$$b_1 = (1,07122) (0,82600) + (-0,07533) (0,69493) + (-0,11126) (1,21397)$$

$$b_2 = (-0,07533) (0,82600) + (0,27063) (0,69493) + (-0,04760) (1,21397)$$

$$b_3 = (-0,11126) (0,82600) + (-0,04760) (0,69493) + (0,11236) (1,21397)$$

resolviendo, se tiene:

$$b_1 = 0,69741 ; b_2 = 0,06806 ; b_3 = 0,01142$$

Para completar el proceso se hace necesario calcular el valor del coeficiente b_0 para ello se procede de la siguiente forma:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_{2a} - b_3 \bar{X}_{2b} \quad , \text{ (VII)}$$

donde Y y X están representados por sus medias.

$$Y = \log. \text{ de } 88,30 \text{ qq/ Ha.} = 1,94596$$

$$X_1 = \log. \text{ de } 56,52 \text{ j/Ha.} = 1,75220$$

$$X_{2b} = \log. \text{ de } 3.915,00 \text{ m\$n/Ha.} = 3,59273$$

$$X_{2a} = \log. \text{ de } 1.953,54 \text{ m\$n/Ha.} = 3,29092$$

reemplazando en la ecuación (VII), se tiene:

$$\log. b_0 = 1,94596 - (0,69741) \cdot (1,75220) - (0,06806) \cdot (3,29092) - (0,01142) \cdot (3,59273)$$

$$\log. b_0 = 0,41029$$

$$b_0 = 2,572$$

El coeficiente b_0 calculado permite construir la función de producción:

$$\log. Y = 0,41029 + 0,69741 \log. X_1 + 0,06806 \log. X_{2a} + 0,01142 \log. X_{2b} ; \text{ que expresada en su forma potencial es:}$$

$$Y = 2,572 \cdot X_1^{0,69741} \cdot X_{2a}^{0,06806} \cdot X_{2b}^{0,01142} \quad \text{ (VIII)}$$

los respectivos valores de los coeficientes b_1 , b_2 y b_3 . La elasticidad total está dada por la suma de las elasticidades parciales, es decir: $Et = 0,77689$, menor que la unidad. Comparando este valor con el correspondiente a la función: $Y = f(X_1, X_2)$, se observa que son prácticamente iguales, levemente superior al de la función simple $Y = f(X_1)$ y algo inferior al de la función $Y = f(X_1, X_{2a})$.

El coeficiente de correlación múltiple corregido, que relaciona a las variables mano de obra efectiva, gastos de cultivo y gastos en equipo es: $R_c = 0,660$, para $N = 31$.

El correspondiente valor de F es igual a 6,95, siendo el mismo altamente significativo. Observando los coeficientes de correlación de las distintas funciones halladas, se nota que su valor sufre las mismas oscilaciones que en el caso de comparaciones de elasticidades.

El coeficiente de determinación $R^2 = 0,4357$ está indicando que el 43 % aproximadamente de las variaciones de la producción son explicadas por variaciones en el volumen utilizado de los recursos mano de obra, gastos de cultivo y gastos en equipo. El 56 % restante de las variaciones en la producción se explican por la acción de los recursos no considerados.

Siguiendo la misma metodología de cálculo que para los casos anteriores, se ha determinado la productividad marginal correspondientes a los recursos incluidos en esta última función de producción. Los valores de Y y de X_1 , X_{2a} y X_{2b} utilizados, corresponden a las medias de los mismos en la muestra, o sean:

88,30 qq de uva/Ha. de producción (Y); 56,52 jornadas de mano de obra/Ha. cultivadas con vid (X_1); 1.943,54 m\$ñ de gastos de cultivo/Ha. (X_{2a}); y 3.015,00 m\$ñ de gastos en equipo/Ha. (X_{2b}).

$$\frac{dY}{dX_1} = b_1 \frac{Y}{X_1} = 0,697 \frac{Y}{X_1} = 2,52$$

$$\frac{dY}{dX_{2a}} = b_2 \frac{Y}{X_{2a}} = 0,068 \frac{Y}{X_{2a}} = 1,43$$

$$\frac{dY}{dX_{2b}} = b_3 \frac{Y}{X_{2b}} = 0,011 \frac{Y}{X_{2b}} = 0,11$$

La productividad marginal de la mano de obra (X_1) sigue siendo alta, la misma es dos veces y media el valor de una jornada e indica la conveniencia de aumentar la escala de operaciones de este recurso a fin de alcanzar un mayor beneficio bruto final.

Respecto al recurso gastos de cultivo (X_{2a}) el valor encontrado de productividad marginal 1,43, mayor al de una unidad de recurso, 1 peso, indicaría también la conveniencia de incrementar los gastos de cultivo hasta alcanzar una relación óptima de insumo-producto.

No puede decirse lo mismo respecto al recurso gastos de equipo (X_{2b}) ya que el valor hallado de productividad marginal, 0,11, está indicando que el mismo, en la situación media, ha sobrepasado la situación óptima, actuando a pérdida, porque en dicha situación un

peso invertido en gastos de equipo reditúa una productividad estimada en 11 centavos.

Como un paso previo a la interpretación de los resultados hasta ahora obtenidos, se impone cumplimentar una etapa más en el análisis y que consiste en la determinación de los coeficientes de correlación parcial.

El método utilizado es el abreviado de Doolittle ⁽⁶⁾. Su aplicación permitió obtener los siguientes coeficientes de correlación parcial:

$$a) \quad r_{yx_1} \cdot x_{2a} x_{2b} = 0,8138$$

$$b) \quad r_{yx_{2a}} \cdot x_1 x_{2b} = 0,1511$$

$$c) \quad r_{yx_{2b}} \cdot x_1 x_{2a} = -0,3884$$

La significancia estadística de los coeficientes hallados, determinados por la prueba de t es para

$$a) \quad t = 7,28 \text{ (xx) altamente significativo}$$

$$b) \quad t = 0,79 \text{ no significativo}$$

$$c) \quad t = 2,19 \text{ (x) significativo}$$

Los coeficientes de correlación total son:

$$r_{yx_1} = 0,671 \text{ altamente significativo}$$

$$r_{yx_{2a}} = 0,288 \text{ no significativo}$$

$$r_{yx_{2b}} = 0,310 \text{ significativo}$$

Con la información proporcionada por los valores de los coeficientes de correlación parciales y totales se está en situación de hacer la siguiente interpretación:

– El coeficiente de correlación parcial entre Y y X_1 , manteniendo constante a X_{2a} y X_{2b} , es altamente significativo. Asimismo lo es la correlación total entre Y y X_1 .

– Se observa que entre Y y X_{2b} hay una correlación inversa y significativa cuando se mantienen constante a X_1 y X_{2a} . Sin embargo la correlación total entre Y y X_{2b} es positiva y significativa.

Como consecuencia, se impone comprobar si la diferencia observada entre los coeficientes de correlación (parcial y total) es significativa.

Para ello se hace uso de la “prueba del desvío normal típico” ⁽⁷⁾, que consiste en transformar los valores de r en z, y con ellos se procede a calcular el valor de x (desvío normal típico) aplicando la fórmula:

$$x = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{N'_1} + \frac{1}{N'_2}}}$$

El valor transformado del coeficiente de correlación total ryx_{2b} z_1 es igual a 0,32 y el valor de z_2 correspondiente al coeficiente de correlación parcial $ryx_{2b \cdot 1 \cdot 2a}$ es igual a 0,41.

$$x = \frac{0,32 + 0,41}{\sqrt{\frac{1}{28} + \frac{1}{26}}} = 2,70 \text{ (xx) altamente significativo.}$$

La conclusión más importante que se deriva del análisis de correlación parcial, es que cuando se considera únicamente al recurso gastos de equipo (X_{2b}), manteniendo constante a la mano de obra (X_1) y gastos de cultivo (X_{2a}), la productividad del mismo es negativa, es decir, a mayores gastos de equipo menor producción.

Esta comprobación es de fundamental importancia para la interpretación final del análisis.

No hay duda que los últimos resultados son sorpresivos e inesperados y además compromete seriamente la posibilidad de alcanzar los objetivos que faltan, principalmente la determinación de los niveles óptimos de uso de los recursos cuestionados, como se demostrará.

Teóricamente el cálculo de los niveles óptimos de uso de los recursos variables X_1 , X_{2a} y X_{2b} no revisten mayor dificultad. Es sabido que cuando todos los recursos productivos trabajan con la máxima eficiencia económica se consigue el máximo beneficio y ello ocurre cuando:

$$\pi = Y \cdot Py - (X_1 P_{X_1} + X_{2a} + X_{2b}) = \text{Máximo}$$

diferenciando se tiene:

$$\pi = Py \cdot dy - P_{X_1} \cdot dx_1 - dx_{2a} - dx_{2b} = 0 \text{ (X)}$$

de donde resulta:

$$Py \cdot dy = P_{X_1} \cdot dx_1 + dx_{2a} + dx_{2b}, \text{ (XI)}$$

esta situación se consigue cuando cada uno de los recursos está en el óptimo, o sea:

$$\frac{dy}{dx_1} = b \frac{Y}{X_1} = \frac{P_{X_1}}{P} \cdot \frac{Y}{X_1} = \frac{P^y}{I^y} ; \text{ (XII)}$$

$$\frac{dy}{dx_{2b}} = b \frac{Y}{X_{2b}^3} = \frac{1}{P_y} ; \quad dx$$

a la vez debe cumplirse que:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{dy}{dx_{2a}} = \frac{dy}{dx_{2b}} = \frac{1}{P_y} \quad (\text{XIII})$$

Reemplazando en la función de producción las incógnitas por sus derivadas en el óptimo y resolviendo, es posible calcular el nivel óptimo de productos Y que da el máximo beneficio bruto.

Siguiendo la metodología expuesta se obtuvo la siguiente ecuación: $0,92052 \log Y = 0,52043 + 0,69740 \log X_1$, (XIV) que permite obtener valores óptimos teóricos de Y en función de variables de X_1 .

Si a X_1 en la ecuación se le da el valor de 56 jornadas por Ha y año, correspondiente a la media de la muestra, el valor calculado de Y es igual:

$$Y = 77,59 \text{ qq/Ha que equivale a m\$n } 35.885,00$$

Con este valor de Y se está en condiciones de calcular los niveles óptimos que le corresponden a X_{2a} y X_{2b} reemplazando en (XII), que son:

$$X_{2a} = \text{m\$n } 2.442,00$$

$$X_{2b} = \text{m\$n } 410,00$$

Reemplazando en (IX) se está en condiciones de calcular el beneficio máximo, que es igual a:

$$\pi = \text{m\$n } 21.833,00; \text{ expresado en qq es:}$$

$$\pi = 47 \text{ qq/Ha.}$$

Aplicando la teoría marginalista y por deducción matemática se ha podido llegar a un resultado que en general puede ser aceptable, si no fuera porque la cantidad asignada para gastos de equipo está muy lejos de satisfacer las necesidades mínimas que en este concepto se requieren por unidad de superficie cultivada con vid.

Se está ante un problema sin solución satisfactoria y se explica por el real comportamiento del recurso X_{2b} en el sistema de producción calculado, demostrado gracias al proceso analítico de correlación parcial. Este ha permitido comprobar que el recurso X_{2b} o sea los gastos de equipo, actúa negativamente en el proceso productivo. Esto explica la imposibilidad matemática de llegar a un resultado lógico cuando se trata de calcular el nivel óptimo de producción a partir de niveles óptimos de los recursos variables, utilizando la función de producción correspondiente.

En la situación dada, el único nivel óptimo de uso aceptable, del recurso gasto de equipo (X_{2b}), desde el punto de vista matemático, es el cero, o sea la eliminación del mismo del complejo productivo, de otra manera, siempre se llegaría a resultados ilógicos. Por lo tanto, insistir en el tema, resultaría ocioso y especulativo.

Como desde el punto de vista técnico no es posible eliminar al recurso equipo y por lo tanto los gastos que se derivan del mismo, lo recomendable es estudiar a este recurso en función de sus componentes. Este análisis permitirá comprobar si la productividad negativa demostrada por este recurso se debe a una falla en su estructura.

Ya se ha visto en el punto 4 que el recurso gastos de equipo está constituido por la suma de los gastos de equipo a tracción a sangre y los gastos de equipo a tracción mecánica.

Este análisis se intentó hacer pero, lamentablemente no se ha podido obtener conclusiones avaladas estadísticamente, debido a que el número de casos se redujo considerablemente al incorporar las nuevas variables.

7. CONCLUSIONES

Es evidente que el proceso productivo y como consecuencia la producción de uva, descansa sobre el recurso variable mano de obra efectiva, demostrado durante el proceso analítico por la significancia estadística de los coeficientes de correlación parcial.

La productividad marginal de este recurso, en la media de la muestra, varía desde un valor de 3,6 para la primera función, a 2,4 en la última función múltiple.

No hay duda que la disminución de la productividad marginal del recurso mano de obra se debe a las interferencias provocadas por algunas de las variables que conforman el sistema de producción. El análisis de correlación parcial demostró que el recurso gastos de equipo actúa negativamente a pesar de tener un coeficiente de regresión positivo.

Como no se pudo obtener conclusiones avaladas estadísticamente, se supone que el comportamiento observado del recurso equipo es consecuencia de una falla en su estructura. Esta suposición es avalada por las conclusiones derivadas del estudio previo de diagnóstico, ⁽¹⁾ donde se comprobó la existencia de unidades de tracción total ociosas y la presencia en la situación media de los dos tipos de tracción: a sangre y mecánica.

El recurso gastos de cultivo, en la media, tiene una productividad igual a 1,4. Esto indica que el recurso está cerca del óptimo económico, por lo que no puede esperarse un significativo aumento en la producción por el incremento del mismo.

Se observa que, comparativamente, dentro de la actividad agrícola mundial, se destaca netamente la productividad de la mano de obra del área estudiada.

8. RECOMENDACIONES

Es de urgente necesidad estudiar el comportamiento del recurso equipo en la situación real y actual, ya que el mismo está íntimamente relacionado con los ingresos y la política de créditos de fomento agropecuario.

Se recomienda aumentar el nivel de uso del recurso mano de obra, por cuanto éste permite un amplio margen de movimiento. Con ello se lograría un significativo aumento en los ingresos brutos totales. Debe interpretarse este aumento como un incremento en el número de trabajos culturales.

RESUMEN

Los predios que integran la muestra representan a empresas agrícolas cuya única actividad es la vitícola, en estado de producción comercial.

Los recursos productivos (insumos) considerados, son los denominados variables, es decir, aquellos que en gran medida pueden ser manejados por el productor durante el proceso productivo.

La metodología seguida se fundamenta en la Teoría Marginalista. Las expresiones matemáticas obtenidas (funciones de producción) derivan de la aplicación de la función Cobb-Douglas.

Del análisis se desprende que el factor mano de obra efectiva es el recurso variable de más alto coeficiente de productividad marginal, sobre el cual descansa toda la responsabilidad del proceso productivo.

El recurso gastos de cultivo tiene un coeficiente de productividad marginal, en la media de la muestra, levemente superior a la unidad.

En cuanto al recurso gastos de equipo, su productividad marginal en la media, es casi nula; además, su actividad en el sistema productivo tiende a disminuir la producción.

BIBLIOGRAFIA

- (6) 1. ANDERSON, R. L. y BANCROFT, T. A. - 1952 - *Statistical theory in research*. Mac Graw - Hill Book. New York.
- (7) 2. BLALOCK, H. M. - 1960 - *Social statistics*. Mac Graw - Hill Book. New York.
- (3) 3. BISHOP, C. E. y TOUSSAINT, W. D. - 1966 - *Introducción al análisis de economía agrícola*. Limusa-Wiley. México.
4. CRUM, W. L. y SCHUMPETER, J. A. - 1968 - *Elementos de matemáticas para economistas y estadígrafos*. Fondo de cultura económica. México.

- (6 y 7) 5. GOULDEN, C. H. - 1952 - *Methods of statistical analysis*. J. Wiley. New York.
6. HEADY, E. O. - 1960 - *Agricultural production economics and resource use*. Prestice-Hall Inc.
- (1) 7. HERNÁNDEZ, L. H. y MAVRICH, E. - 1967 - *Análisis económico de la empresa agraria-Area de San Rafael-Mendoza-Argentina*. Instituto Interamericano de ciencias agrícolas de la O. E. A., Zona Sur. Montevideo.
- (2) 8. HERNÁNDEZ, L. H. y MAVRICH, E. - 1969 - *Productividad de la mano de obra en viñedos-Area de San Rafael-Mendoza-Argentina*. Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias de la U.N.C. Tomo XV, N° 1, Mendoza.
- (5) 9. KEMENY, J. G. *et al.* - 1959 - *Estructuras matemáticas finitas*. EUDEBA. Buenos Aires.
- (4) 10. MANZANARES, E. G. - 1964 - *Funciones de producción de la agricultura*. Revista de Estudios Agro-Sociales, N° 48. Madrid.
11. VINCENT, H. W. - 1964 - *Agricultura, Normas sobre economía y administración*. Limusa-Wiley. México.