

## CONSIDERACIONES ACERCA DEL MOMENTO OPTIMO DE INICIAR UNA INVERSION

por COLOMA FERRA (1)  
Profesora Titular de Análisis Económico de Proyectos I de la Facultad de Ciencias Económicas de la U. N. de Cuyo.

### *I. Introducción*

En la evaluación de proyectos cuyos beneficios netos operativos crecen a través del tiempo y que tienen una vida útil relativamente larga, suele ocurrir que al determinar el momento óptimo de iniciar la inversión se suponga que la vida útil es infinita. Esto ocurre con frecuencia en la evaluación de proyectos de carretera, aunque no es un criterio exclusivo de este tipo de proyectos.

El objetivo de este trabajo es mostrar que la vida útil del proyecto ( $n$ ) puede ser una variable que afecta significativamente la determinación del momento óptimo de iniciación del proyecto, aún cuando  $n$  sea "grande". En otras palabras, el momento óptimo que resulta de suponer que la duración es infinita puede ser considerablemente distinto del que resulta de suponer que la vida útil es "grande", digamos, 30, 40 o 50 años.

Para demostrarlo, en la sección II explicitaremos en primer lugar los supuestos usuales en este tipo de

---

(1) La autora agradece los comentarios recibidos de Roberto Cortegoso y de Sergio Rudolphy, profesores de la Universidad Nacional de Cuyo y de la Pontificia Universidad Católica de Chile, respectivamente.

proyectos y llegaremos a fórmulas que permitan determinar el momento óptimo en función de diversas variables: inversión inicial, beneficio neto operativo del primer año, tasa de descuento, vida útil del proyecto y tasa de crecimiento de los beneficios netos. Analizaremos dos casos: primero supondremos que los proyectos no son repetibles al final de su vida útil y luego que sí lo son. En ambas situaciones veremos la diferencia entre suponer que la vida útil es infinita y suponer que es finita. Para una mejor visualización de la importancia de las distintas variables en la determinación del momento óptimo, presentaremos un conjunto de tablas que indican el momento óptimo resultante de diversas combinaciones de valores de las variables.

Luego generalizaremos las fórmulas para que sean aplicables a casos menos restrictivos.

En la sección III resumiremos las principales conclusiones.

## *II. Determinación del momento óptimo*

### *1. Supuestos del análisis*

Por ahora, haremos algunos supuestos simplificados a efectos de no complicar innecesariamente los resultados. Luego completaremos el análisis para que las fórmulas sean válidas en casos más generales.

Los supuestos iniciales son los siguientes:

a) El tiempo se divide en períodos anuales y tanto los costos como los beneficios anuales son imputables a un momento dado dentro del período (por ejemplo, el primer día de cada año).

b) Los beneficios netos operativos de cada año  $t$  ( $B_t$ ) dependen solamente del tiempo calendario  $t$  y no del momento en que se inicia el proyecto.

c) Los beneficios netos operativos aumentan a una tasa anual constante y comienzan a producirse un año después de realizar la inversión.

d) La inversión se realiza totalmente en un período.

e) El monto de la inversión no depende del momento de iniciación del proyecto.

f) La inversión no tiene valor residual.

Los tres últimos supuestos serán eliminados más adelante.

Entonces, en el caso más simplificado, la inversión inicial será  $I$  y los beneficios netos operativos correspondientes al año  $t$  pueden expresarse como:

$$B_t = A (1 + d)^{t-1}$$

donde:  $d$  = tasa de crecimiento anual de los beneficios netos operativos.

$A$  = constante, que coincide con  $B_1$ .

## 2. Proyectos no repetibles

El valor actual neto de iniciar el proyecto en el momento cero ( $VAN_0$ ) será, si el proyecto dura  $n$  años (2):

$$VAN_0 = - I + \frac{A}{(1+r)} + \frac{A(1+d)}{(1+r)^2} + \frac{A(1+d)^2}{(1+r)^3} + \dots + \frac{A(1+d)^{n-1}}{(1+r)^n}$$

Desde el segundo término en adelante, se tiene una progresión geométrica de razón  $(1 + d)/(1 + r)$  y el número de términos igual a  $n$ . Por lo tanto, resulta:

(2) Si el proyecto durara hasta infinito, el VAN sería:

$$VAN_0 = - I + \frac{A}{r-d}, \text{ siempre que } r > d.$$

$$VAN_0 = -I + \frac{A[(1+r)^n - (1+d)^n]}{(1+r)^n (r-d)}$$

donde  $r$  = tasa de descuento anual

$n$  = vida útil, expresada en años durante los cuales se producen los beneficios netos operativos.

Una forma de llegar a determinar el momento óptimo es estimar los valores actuales netos correspondientes al proyecto si se inicia en el momento 0, en el momento 1 (dentro de un año), en el 2, etc., y elegir el momento de iniciación tal que el VAN sea máximo (en todos los casos el valor actual neto se debe referir al mismo momento, en este caso al momento cero).

Esto es equivalente a encontrar el cambio en el VAN debido a la postergación de la iniciación del proyecto en un año, para sucesivos pares de momentos: cambio en el VAN por pasar de iniciar en 0 a iniciar en 1, cambio por pasar de iniciar en 1 a iniciar en 2, etc. Mientras ese cambio sea positivo, convendrá postergar la iniciación, puesto que ello implicará que el VAN de iniciar en  $j$  es mayor que el de iniciar en  $(j-1)$ . Cuando el cambio sea igual a cero, existirá una situación de indiferencia entre iniciar en  $(j-1)$  e iniciar en  $j$ .

A los efectos de encontrar una fórmula para la determinación del momento óptimo, veamos cuál será el VAN de iniciar en el momento 1:

$$VAN_1 = -\frac{I}{(1+r)} + \frac{A(1+d)}{(1+r)^2} + \frac{A(1+d)^2}{(1+r)^3} + \dots + \frac{A(1+d)^n}{(1+r)^{n+1}}$$

La diferencia en el VAN entre iniciar en 1 e iniciar en 0 será:

$$\Delta VAN_{0,1} = I - \frac{I}{(1+r)} - \frac{A}{(1+r)} + \frac{A(1+d)^n}{(1+r)^{n+1}}$$

Si seguimos el mismo procedimiento para otros pares de momentos posibles de iniciación, podemos llegar a generalizar los resultados para el cambio en el VAN por pasar de iniciar en (j-1) a iniciar en j:

$$\Delta \text{VAN}_{j-1,j} = \frac{I}{(1+r)^{j-1}} - \frac{I}{(1+r)^j} - \frac{A(1+d)^{j-1}}{(1+r)^j} + \frac{A(1+d)^{n+j-1}}{(1+r)^{n+j}}$$

Agrupando términos se llega a:

$$\Delta \text{VAN}_{j-1,j} = \frac{I r - A(1+d)^{j-1}}{(1+r)^j} + \frac{A(1+d)^{n+j-1}}{(1+r)^{n+j}} \quad [1]$$

De acuerdo con lo visto anteriormente, convendrá iniciar el proyecto en el momento j-1 para el cual el cambio en el VAN sea lo más pequeño posible pero aún positivo. Si se diera el caso de que el cambio fuera cero, daría lo mismo iniciar en j-1 o en j.

Teóricamente, entonces, hay que determinar el j para el cual el cambio en el VAN es cero, aún cuando en los proyectos concretos no se observe el cero exactamente (esto se debe a que estamos tomando períodos discretos para evaluar el proyecto).

Al igualar a cero la expresión [1], resulta lo siguiente:

$$I r + \frac{A (1+d)^{n+j-1}}{(1+r)^n} = A (1+d)^{j-1} \quad [2]$$

lo cual indica que conviene postergar la iniciación del proyecto hasta que el beneficio adicional de postergar se iguale con el costo adicional de postergar. En efecto, si se posterga un año la iniciación, desde j-1 hasta j, se evitan los costos por concepto de interés de un año del capital inicial invertido, representados por el primer término de la ecuación [2], y se gana un beneficio neto adicional al final de la vida útil del proyecto (segundo término del primer miembro de la ecuación). Por otro lado, si se posterga se pierde el beneficio neto correspondiente al primer año, que se hubiera obtenido en el momento j (lo indicado en el segundo miembro de [2]).

Esta fórmula es general para cualquier  $n$ . En el caso particular en el cual  $n$  es infinito, el segundo término del primer miembro es igual a cero (siempre que  $d$  sea menor que  $r$ ).

En muchos proyectos se omite la consideración de ese término de la ecuación [2], por suponer que como  $n$  es "grande", puede válidamente asimilarse al caso de  $n$  igual a infinito. Sin embargo, esto puede llevar a un error considerable en la determinación del momento óptimo de iniciar el proyecto.

A partir de [2], usando logaritmos, se puede despejar  $j$  y así se llega a lo siguiente:

Para  $n$  igual a infinito:

$$j = \frac{\ln(I/A) + \ln r}{\ln(1+d)} + 1 \quad [3]$$

Para  $n$  distinto de infinito:

$$j = \frac{\ln(I/A) + \ln r + n \ln(1+r) - \ln[(1+r)^n - (1+d)^n]}{\ln(1+d)} + 1 \quad [4]$$

El  $j$  resultante puede ser positivo, negativo o cero, y puede ser un número entero o no.

Si es un número entero y positivo, indica que existe una situación de indiferencia entre iniciar el proyecto en  $j$  o iniciarlo en  $j-1$ . Así, si  $j = 8$ , sería lo mismo iniciar en el momento 7 o en el 8 porque precisamente el cambio en el VAN al pasar de 7 a 8 es cero, e indica la situación de indiferencia.

Por otra parte, si  $j$  no es entero, también es indiferente iniciar en  $j$  o en  $j-1$ , pero al ser números no enteros se puede tomar como momento óptimo aproximado el entero inmediato inferior al  $j$  obtenido. Así, si  $j = 8,4$  habría una situación de indiferencia entre iniciar en 7,4 ( $j-1$ ) o en 8,4. Dado que estamos trabajando con

períodos anuales, se puede tomar el 8 como el momento óptimo. (3)

Si  $j$  resulta negativo, quiere decir que ya pasó el momento óptimo y por lo tanto habría que iniciar el proyecto inmediatamente.

Por supuesto que el momento óptimo así obtenido indicará el año en el cual sería conveniente iniciar la inversión siempre que el valor actual neto del proyecto iniciado en ese momento sea positivo. La verificación de que el VAN es positivo es siempre necesaria.

A partir de las fórmulas [3] y [4] se puede observar que el momento óptimo depende de las siguientes variables:  $I/A$ ,  $r$ ,  $n$  y  $d$ .

Veamos cómo influye cada una de ellas en el resultado.

a) *Inversión inicial sobre beneficio neto del año 1 ( $I/A$ )*

Cuando  $I/A$  aumenta,  $j$  también aumenta. Este resultado es evidente, puesto que la derivada de  $j$  con respecto a  $I/A$  es positiva en ambas fórmulas. En efecto:

$$\frac{\partial j}{\partial (I/A)} = \frac{A/I}{\ln(1+d)} > 0$$

b) *Tasa de descuento ( $r$ )*

Cuando  $n$  es infinito la relación es clara: si aumenta  $r$ , también aumenta  $j$ . A partir de [3]:

$$\frac{\partial j}{\partial r} = \frac{1/r}{\ln(1+d)} > 0$$

---

(3) Si se deseara mayor precisión, podrían elegirse períodos menores a un año.

En cambio, si  $n$  es un número finito (fórmula [4]), puede ocurrir que  $j$  aumente o disminuya al aumentar  $r$ .

En efecto, a partir de [4]:

$$\frac{\partial j}{\partial r} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{n}{1+r} - \frac{n(1+r)^{n-1}}{[(1+r)^n - (1+d)^n]}}{\ln(1+d)}$$

Para que la derivada sea positiva se requiere que el numerador sea positivo (pues el denominador siempre lo es si  $d$  es positivo). A medida que  $d$  aumenta, el término negativo del numerador se hace más grande y eventualmente puede llegar a ser mayor que el positivo. Por lo tanto, no se puede establecer a priori si  $j$  aumenta o disminuye cuando aumenta  $r$ .

*c) Vida útil del proyecto (n)(4)*

A partir de [4] se puede demostrar que cuando  $n$  aumenta  $j$  disminuye. En efecto, la suma algebraica de los dos términos donde aparece  $n$  es positiva y tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, siempre que  $d < r$ .

Veamos: en primer lugar, es evidente que:

$$n \ln(1+r) > \ln[(1+r)^n - (1+d)^n]$$

puesto que  $n \ln(1+r) = \ln(1+r)^n$ , y el segundo miembro es el  $\ln$  de  $(1+r)^n$  *menos* un factor positivo.

Para demostrar que la diferencia entre ambos términos tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, ella se puede escribir como:

(4) La variable  $n$  no es continua; el tiempo está dividido en períodos anuales y por lo tanto se usa la capitalización (actualización) anual. Esto implica que no se puede aplicar estrictamente el concepto de derivada sino que se deben utilizar cambios en  $n$  discretos. Las conclusiones, sin embargo, no se ven afectadas por esta circunstancia.

$$\ln \left[ \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - (1+d)^n} \right]$$

y basta demostrar que lo que está dentro del corchete tiende a 1 cuando  $n$  tiende a infinito, puesto que  $\ln 1 = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - (1+d)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - [(1+d)/(1+r)]^n} = 1$$

debido a que  $[(1+d)/(1+r)]^n$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

*d) Tasa de crecimiento de los beneficios netos operativos (d)*

Si  $n$  es igual a infinito, se puede ver fácilmente, a partir de [3], que  $j$  disminuye cuando  $d$  aumenta, puesto que  $d$  está en el denominador de la expresión. Como excepción se puede mencionar que si  $j$  resulta ser igual a 1,  $j$  no depende del valor de  $d$ , puesto que para obtener ese resultado debe ocurrir que el numerador del primer término de [3] sea igual a cero (o sea que  $\ln(I/A) + \ln r = 0$ ).

Si  $n$  es distinto de infinito, al aumentar  $d$ , puede ocurrir que  $j$  aumente o disminuya. En efecto, si  $d$  aumenta, el término negativo del numerador de [4] se hace más pequeño, con lo cual el numerador aumenta. Pero también aumenta el denominador y el resultado es incierto.

*e) Resultados numéricos*

Usando las fórmulas [3] y [4], se puede observar que el valor de  $j$  puede resultar significativamente distinto según  $n$  sea o no infinito. Con el objeto de visualizar el error que puede llegar a cometerse si se utiliza la fórmula [3] en lugar de la [4] cuando en realidad  $n$  es distinto de infinito, hemos elaborado un

conjunto de tablas en las cuales aparece el valor de  $j$  para distintos valores de las variables. Las tablas correspondientes a los proyectos no repetibles se presentan dentro del cuadro n° 1. En las primeras tres tablas se presentan los resultados de sensibilizar  $n$  en combinación con cada una de las otras tres variables. Se puede observar que realmente  $j$  es altamente sensible al valor de  $n$ , e incluso hay diferencias sustanciales entre el  $j$  que resulta cuando  $n$  es infinito y el que resulta cuando  $n$  es grande (como sería  $n = 30, 40$  ó  $50$ ). Así por ejemplo, en la tabla 1.a., si  $I/A = 10, r = 0,10$  y  $d = 0,01$ ,  $j$  es 1 cuando  $n$  es infinito, 2 cuando  $n = 50$ , 4 cuando  $n = 40$ , 9 cuando  $n = 30$ , 21 cuando  $n = 20$  y 56 cuando  $n = 10$ .

En las otras tres tablas del cuadro n° 1 se ha sensibilizado el efecto sobre  $j$  de las combinaciones de las tres variables distintas de  $n$ , con fines ilustrativos.

Del análisis de las seis tablas surge la comprobación de los efectos de cada una de las variables sobre el momento óptimo, analizados anteriormente.

### 3. Proyectos repetibles

Si los proyectos se pueden repetir al final de su vida útil, las fórmulas resultan algo distintas que en el caso anterior. Para deducirlas, seguiremos el mismo procedimiento. El valor actual neto si se inicia el proyecto en el momento cero es:

$$\begin{aligned} \text{VAN}_0 &= - I + \frac{A}{1+r} + \frac{A(1+d)}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A(1+d)^{n-1}}{(1+r)^n} \\ &- \frac{I}{(1+r)^n} + \frac{A(1+d)^n}{(1+r)^{n+1}} + \dots + \frac{A(1+d)^{2n-1}}{(1+r)^{2n}} \\ &- \frac{I}{(1+r)^{2n}} + \frac{A(1+d)^{2n}}{(1+r)^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

En esta sumatoria hay dos progresiones geométricas: a) los términos donde aparece I: la razón de la progresión es  $1/(1+r)^n$ ; y b) los términos donde aparece A: la razón de la progresión es  $(1+d)/(1+r)$ . En ambas progresiones el número de términos es infinito.

De ello resulta que:

$$VAN_0 = - I \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} + \frac{A}{r-d}$$

El cambio en el VAN por iniciar en el momento uno en lugar del cero es:

$$\Delta VAN_{0,1} = - \frac{A}{(1+r)} + \frac{I}{(1+r)} \frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$$

Generalizando, el cambio en el VAN por pasar de iniciar en  $j-1$  a iniciar en  $j$  resulta:

$$\Delta VAN_{j-1,j} = - \frac{A(1+d)^{j-1}}{(1+r)^j} + \frac{I}{(1+r)^j} \frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} \quad [5]$$

Para determinar el momento óptimo, igualamos a cero la expresión [5] y obtenemos:

$$I \frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} - A(1+d)^{j-1} = 0 \quad [6]$$

A partir de [6] obtenemos la expresión para calcular  $j$ :

$$j = \frac{\ln(I/A) + \ln r + n \ln(1+r) - \ln[(1+r)^n - 1]}{\ln(1+d)} + 1 \quad [7]$$

Se puede observar que la fórmula [7] es muy similar a la [4]. La única diferencia está en el último término

del numerador.

En consecuencia, la forma en que influyen las cuatro variables en la determinación del momento óptimo es muy similar a la del caso anterior.

Veamos:

a) *Inversión inicial sobre beneficio neto del año 1 (I/A)*

Esta variable tiene el mismo efecto que en el caso de proyectos no repetibles: cuando aumenta I/A, también aumenta  $j$ .

b) *Tasa de descuento (r)*

A partir de [7]:

$$\frac{\partial j}{\partial r} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{n}{1+r} - \frac{n(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n - 1}}{\ln(1+r)}$$

Se puede demostrar que esta derivada es siempre positiva (5). Por lo tanto, al aumentar  $r$ , aumenta  $j$ . En este caso el resultado difiere del obtenido para los proyectos no repetibles.

(5) Basta demostrar que el numerador es positivo, o sea que:

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{1+r} > \frac{n(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n - 1} = \frac{n}{1+r} \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\frac{1}{r} > \frac{n}{1+r} \left[ \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} - 1 \right]; \quad \frac{1+r}{r n} > \frac{1}{(1+r)^n - 1}$$

La relación se cumple, pues  $1+r > 1$ , y  $r n < (1+r)^n - 1$ .

c) *Vida útil del proyecto (n)*

A partir de [7] se demuestra que cuando  $n$  aumenta  $j$  disminuye, puesto que la suma algebraica de los dos términos donde aparece  $n$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

d) *Tasa de crecimiento de los beneficios netos operativos (d)*

En [7],  $d$  sólo aparece en el denominador. En consecuencia, cuando  $d$  aumenta  $j$  disminuye.

4. *Comparación de ambos tipos de proyectos*

Veamos ahora la diferencia entre el momento óptimo en el caso de proyectos no repetibles ( $j_{NR}$ ) y en el caso de repetibles ( $j_R$ ). Si restamos [4] menos [7] resulta:

$$j_{NR} - j_R = \frac{-\ln [(1+r)^n - (1+d)^n] + \ln [(1+r)^n - 1]}{\ln (1+d)}$$

La diferencia es siempre positiva dado que el valor del corchete precedido por el signo negativo es menor que el del precedido por el signo positivo, debido a que  $(1+d)^n > 1$ . Es decir que el momento óptimo para iniciar proyectos no repetibles es mayor que el de los repetibles. En otras palabras, los repetibles deberán postergar menos su iniciación.

Cuando en los no repetibles el  $n$  tiende a infinito, la diferencia en ambos momentos óptimos tiende a cero.

Con fines ilustrativos, en el cuadro n° 2 se presentan 6 tablas similares a las del cuadro n° 1 con los  $j$  encontrados en el caso de proyectos repetibles. También en este caso, el momento óptimo resulta significativamente distinto según sea la vida útil infinita o finita.

5. Caso en que la inversión dura más de un período

Si bien todas las fórmulas anteriores han sido deducidas suponiendo que la inversión tiene lugar en un solo período y es imputable al momento inicial del proyecto, ellas pueden también utilizarse para casos en los cuales este supuesto no se cumple.

En efecto, si la inversión dura  $k$  períodos, se puede definir una inversión total,  $I_T$ , de la siguiente manera:

$$I_T = I^0 (1+r)^{k-1} + I^1 (1+r)^{k-2} + \dots + I^{k-2} (1+r) + I^{k-1}$$

donde:  $I^i$  = inversión a realizar en el momento  $i$ .

Así se obtiene el valor capitalizado de la inversión al momento  $k-1$ .

Este valor  $I_T$  depende de los montos de inversión de cada período, del número de períodos y de la tasa de descuento. Una vez obtenido, puede utilizarse en las fórmulas de las secciones anteriores en reemplazo de la inversión  $I$ . Es fácil demostrar, siguiendo el mismo procedimiento anterior, que el momento óptimo de iniciar la inversión será la resultante de restar  $(k-1)$  a lo obtenido al aplicar las fórmulas [3], [4] o [7], según el caso de que se trate.

La explicación de este ajuste es la siguiente: dado que  $I_T$  es un valor capitalizado al momento  $(k-1)$  y ese valor se usó en reemplazo de la  $I$  (inversión en un solo período), el "momento óptimo" resultante de la aplicación de las fórmulas corresponde a un año antes de que ocurra el primer beneficio neto operativo, o sea el momento óptimo de realizar la inversión cuando ésta se produce sólo en un período. Por lo tanto, en el caso en que la inversión se produzca en  $k$  años, el verdadero momento óptimo para iniciarla es el resultante de aplicar la fórmula *menos*  $(k-1)$ .

Además, hay que tener en cuenta que al hacer análisis de sensibilidad con la variable  $r$ , habrá que introducir en la fórmula, en forma explícita, el equivalente de  $I_T$ , pues éste varía con  $r$ .

6. Caso en que el monto de la inversión se modifica a través del tiempo

Supongamos que el monto de inversión inicial es mayor a medida que pasa el tiempo, y que aumenta a una tasa anual  $c$ :

$$I_t = I_0 (1+c)^t$$

donde  $I_0$  es el monto de la inversión total si ella se realiza en el momento 0.

A continuación exponemos las fórmulas finales a las que se llega para encontrar  $j$  si la inversión tiene lugar en un solo período. Las fórmulas [3], [4] y [7] resultan levemente modificadas, de la siguiente manera:

Si  $n$  es infinito:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c)}{\ln[(1+d)/(1+c)]} + 1 \quad [3']$$

Si  $n$  es distinto de infinito:

Proyectos no repetibles:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c) + n \ln(1+r) - \ln[(1+r)^n - (1+d)^n]}{\ln[(1+d)/(1+c)]} + 1 \quad [4']$$

Proyectos repetibles:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c) + n \ln(1+r) - \ln[(1+r)^n - (1+c)^n]}{\ln[(1+d)/(1+c)]} + 1 \quad [7']$$

Si la inversión, aparte de crecer en el tiempo, tuviera lugar en más de un período, habría que reemplazar  $I_0$  por  $I_{T_0}$  y al  $j$  obtenido restarle  $(k-1)$  para encontrar el momento óptimo.

7. *Caso en que exista un valor residual de la inversión*

Si la inversión tiene valor residual al cabo de su vida útil, al estimar el valor actual neto habrá que considerar un término adicional. Así, si se inicia la inversión en el momento cero, se agregará:

$$\frac{VR}{(1+r)^n}$$

donde VR = valor residual.

A los efectos de simplificar las fórmulas, puede expresarse el valor residual como un porcentaje  $v$  de la inversión inicial:

$$VR = v I$$

Tanto para los proyectos repetibles como para los no repetibles, la única modificación en las fórmulas para obtener  $j$  es que se debe reemplazar el término  $\ln(1+r)$  en el numerador de [4] y [7] por  $\ln[(1+r)^n - v]$ .

8. *Caso general*

Veremos a continuación cómo quedan las fórmulas para encontrar  $j$  cuando solamente se hacen los tres primeros supuestos de la sección II. 1.

Si  $n$  es infinito:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c)}{\ln[(1+d)/(1+c)]} - k + 2 \quad [3'']$$

Si  $n$  es distinto de infinito:

Proyectos no repetibles:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c) + \ln[(1+r)^n - v] - \ln[(1+r)^n - (1+d)^n]}{\ln[(1+d)/(1+c)]} - k + 2 \quad [4'']$$

Proyectos repetibles:

$$j = \frac{\ln(I_0/A) + \ln(r-c) + \ln[(1+r)^n - v] - \ln[(1+r)^n - (1+c)^n]}{\ln[(1+d)/(1+c)]} - k + 2 \quad [7'']$$

En estas fórmulas sigue siendo válido lo encontrado anteriormente respecto de la influencia que sobre  $\bar{j}$  tienen las cuatro variables básicas, siempre que se cumpla que  $r > d > c$ .

### III. Conclusiones

Para demostrar la relevancia de ciertas variables en la determinación del momento óptimo de iniciar una inversión, utilizamos un modelo con los siguientes supuestos:

- a) El tiempo se divide en períodos anuales.
- b) Los beneficios netos operativos de cada año  $t$  dependen solo del tiempo calendario y no del momento de iniciación del proyecto.
- c) Los beneficios netos operativos aumentan a una tasa anual constante.

Inicialmente, el trabajo fue planteado para demostrar la hipótesis de que la vida útil del proyecto es una variable que influye significativamente en la determinación del momento óptimo de iniciar la inversión y que, por lo tanto, no es indiferente suponer que el proyecto tiene una duración larga o suponer que dura infinito. La confirmación de la hipótesis surge especialmente de la observación de las tablas de los cuadros n° 1 y 2, para proyectos no repetibles y repetibles, respectivamente.

Los resultados para los proyectos repetibles indican que deben iniciarse antes que sus similares no repetibles. Sin embargo, la diferencia entre ambos es menor cuanto mayor es  $n$ .

El análisis fue también ampliado para estudiar la influencia de otras variables sobre el momento óptimo.

El cuadro n° 3 resume las conclusiones en relación al signo de la derivada del momento óptimo con respecto a cada una de las variables consideradas.

### *Bibliografía*

- FONTAINE, Ernesto, *Evaluación social de proyectos* (Santiago, Universidad Católica, 1981).
- HARBERGER, Arnold, *El análisis de coste-beneficio en los proyectos de transporte*, en "Evaluación de proyectos" (Madrid, Instituto de Estudios Fiscales, 1973).
- ODEPLAN, *Metodología de preparación y presentación de proyectos de inversión Pública. Pavimentación* (Santiago, 1986).

## Cuadro N° 1

Momento óptimo ( $j$ ) en función de diversos valores de las variables

Proyectos no repetibles

Tabla 1.a : Variables sensibilizadas: I/A y n  
Variables predeterminadas:  $r=0,10$  ;  $d=0,01$

I/A \ n	10	20	30	40	50	inf.
5	-12.9	-48.5	-60.6	-65.3	-67.2	-68.7
6	5.4	-30.2	-42.3	-47.0	-48.9	-50.3
7	20.9	-14.7	-26.8	-31.5	-33.4	-34.8
8	34.3	-1.3	-13.3	-18.1	-20.0	-21.4
9	46.2	10.5	-1.5	-6.2	-8.2	-9.6
10	56.8	21.1	9.1	4.4	2.4	1.0
11	66.3	30.7	18.7	13.9	12.0	10.6
12	75.1	39.4	27.4	22.7	20.7	19.3
13	83.1	47.5	35.4	30.7	28.8	27.4
14	90.6	54.9	42.9	38.2	36.2	34.8
15	97.5	61.9	49.8	45.1	43.2	41.7

Tabla 1.b : Variables sensibilizadas: r y n  
Variables predeterminadas: I/A=10 ;  $d=0,01$

r \ n	10	20	30	40	50	inf.
0.05	45.3	-6.8	-31.1	-44.8	-53.1	-68.7
0.06	46.1	-2.2	-23.5	-34.6	-40.9	-50.3
0.07	48.0	3.2	-15.3	-24.3	-29.1	-34.8
0.08	50.6	9.1	-7.0	-14.3	-17.8	-21.4
0.09	53.6	15.1	1.2	-4.7	-7.3	-9.6
0.1	56.8	21.1	9.1	4.4	2.4	1.0
0.11	60.1	27.1	16.7	12.9	11.5	10.6
0.12	63.5	32.9	23.9	20.9	19.9	19.3
0.13	66.9	38.6	30.9	28.5	27.7	27.4
0.14	70.4	44.2	37.5	35.6	35.1	34.8
0.15	73.8	49.5	43.8	42.3	41.9	41.7
0.16	77.2	54.7	49.8	48.6	48.3	48.2
0.17	80.6	59.8	55.6	54.6	54.4	54.3

Tabla 1.c : Variables sensibilizadas: d y n  
 Variables predeterminadas: I/A=10 ; r=0,1

d \ n	10	20	30	40	50	inf.
0.01	56.8	21.1	9.1	4.4	2.4	1.0
0.02	33.1	13.6	6.5	3.5	2.2	1.0
0.03	25.7	11.6	6.1	3.5	2.3	1.0
0.04	22.6	11.0	6.2	3.9	2.6	1.0
0.05	21.3	11.3	6.8	4.5	3.1	1.0
0.06	21.1	12.1	7.9	5.4	3.9	1.0
0.07	22.0	13.7	9.5	6.9	5.3	1.0
0.08	24.2	16.3	12.2	9.5	7.6	1.0
0.09	29.3	21.8	17.6	14.7	12.6	1.0

Tabla 1.d : Variables sensibilizadas: I/A y r  
 Variables predeterminadas: n=20 ; d=0,01

I/A \ r	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16
5	-71.9	-60.6	-48.5	-36.7	-25.5	-14.9
6	-53.6	-42.3	-30.2	-18.4	-7.2	3.4
7	-38.1	-26.8	-14.7	-2.9	8.3	18.9
8	-24.6	-13.3	-1.3	10.5	21.7	32.3
9	-12.8	-1.5	10.5	22.3	33.6	44.2
10	-2.2	9.1	21.1	32.9	44.2	54.7
11	7.4	18.7	30.7	42.5	53.7	64.3
12	16.1	27.4	39.4	51.2	62.5	73.1
13	24.1	35.4	47.5	59.3	70.5	81.1
14	31.6	42.9	54.9	66.7	78.0	88.6
15	38.5	49.8	61.9	73.7	84.9	95.5

Tabla 1.e : Variables sensibilizadas: I/A y d  
Variables predeterminadas: n=20 ; r=0,10

$\begin{matrix} d \\ \backslash \\ 1/A \end{matrix}$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
5	-48.5	-21.4	-11.9	-6.6	-2.9	0.2
6	-30.2	-12.2	-5.7	-2.0	0.8	3.3
7	-14.7	-4.4	-0.5	2.0	4.0	6.0
8	-1.3	2.3	4.0	5.4	6.7	8.3
9	10.5	8.3	8.0	8.4	9.1	10.3
10	21.1	13.6	11.6	11.0	11.3	12.1
11	30.7	18.4	14.8	13.5	13.2	13.8
12	39.4	22.8	17.7	15.7	15.0	15.2
13	47.5	26.9	20.5	17.7	16.7	16.6
14	54.9	30.6	23.0	19.6	18.2	17.9
15	61.9	34.1	25.3	21.4	19.6	19.1

Tabla 1.f : (1) Variables sensibilizadas: r y d  
Variables predeterminadas: n=20 ; I/A=10

$\begin{matrix} d \\ \backslash \\ r \end{matrix}$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.05	-6.8	7.5	16.2	27.9		
0.06	-2.2	6.6	11.7	17.3	26.5	
0.07	3.2	7.5	10.2	13.2	17.4	25.2
0.08	9.1	9.1	10.0	11.5	13.7	17.2
0.09	15.1	11.2	10.6	11.0	12.0	13.8
0.1	21.1	13.6	11.6	11.0	11.3	12.1
0.11	27.1	16.1	12.8	11.5	11.1	11.3
0.12	32.9	18.7	14.2	12.2	11.3	11.1
0.13	38.6	21.2	15.6	13.1	11.7	11.1
0.14	44.2	23.8	17.1	14.0	12.3	11.3
0.15	49.5	26.3	18.7	15.0	12.9	11.7
0.16	54.7	28.7	20.2	16.0	13.6	12.2
0.17	59.8	31.2	21.7	17.1	14.4	12.7

(1) Los j correspondientes a los espacios en blanco no se pueden determinar debido a que  $d \geq r$

## Cuadro N° 2

*Momento óptimo (j) en función de diversos valores de las variables*

*Proyectos repetibles*

Tabla 2.a : Variables sensibilizadas: I/A y n  
Variables predeterminadas: I/A=10 ; d=0,01

I/A \ n	10	20	30	40	50	inf.
5	-19.7	-52.5	-62.7	-66.4	-67.8	-68.7
6	-1.4	-34.2	-44.4	-48.1	-49.5	-50.3
7	14.1	-18.7	-28.9	-32.6	-34.0	-34.8
8	27.5	-5.3	-15.5	-19.2	-20.6	-21.4
9	39.4	6.6	-3.7	-7.3	-8.7	-9.6
10	49.9	17.2	6.9	3.2	1.9	1.0
11	59.5	26.8	16.5	12.8	11.4	10.6
12	68.3	35.5	25.3	21.6	20.2	19.3
13	76.3	43.5	33.3	29.6	28.2	27.4
14	83.8	51.0	40.7	37.1	35.7	34.8
15	90.7	57.9	47.7	44.0	42.6	41.7

Tabla 2.b : Variables sensibilizadas: r y n  
Variables predeterminadas: I/A=10 ; d=0,01

r \ n	10	20	30	40	50	inf.
0.05	27.0	-21.1	-42.2	-53.3	-59.5	-68.7
0.06	31.8	-12.8	-31.1	-40.1	-44.7	-50.3
0.07	36.5	-4.8	-20.7	-27.9	-31.4	-34.8
0.08	41.1	2.8	-10.9	-16.7	-19.3	-21.4
0.09	45.6	10.2	-1.7	-6.3	-8.2	-9.6
0.1	49.9	17.2	6.9	3.2	1.9	1.0
0.11	54.2	23.9	15.1	12.1	11.1	10.6
0.12	58.4	30.3	22.7	20.4	19.7	19.3
0.13	62.4	36.5	30.0	28.1	27.6	27.4
0.14	66.4	42.4	36.8	35.3	35.0	34.8
0.15	70.3	48.1	43.3	42.1	41.8	41.7
0.16	74.1	53.5	49.4	48.5	48.3	48.2
0.17	77.8	58.8	55.2	54.5	54.4	54.3

Tabla 2.c : Variables sensibilizadas: d y n  
 Variables predeterminadas: I/A=10 ; r=0,1

d \ n	10	20	30	40	50	inf.
0.01	49.9	17.2	6.9	3.2	1.9	1.0
0.02	25.6	9.1	4.0	2.1	1.4	1.0
0.03	17.5	6.4	3.0	1.8	1.3	1.0
0.04	13.4	5.1	2.5	1.6	1.2	1.0
0.05	11.0	4.3	2.2	1.5	1.2	1.0
0.06	9.4	3.8	2.0	1.4	1.1	1.0
0.07	8.2	3.4	1.9	1.3	1.1	1.0
0.08	7.3	3.1	1.8	1.3	1.1	1.0
0.09	6.7	2.9	1.7	1.3	1.1	1.0
0.1	6.1	2.7	1.6	1.2	1.1	1.0

Tabla 2.d : Variables sensibilizadas: I/A y r  
 Variables predeterminadas: n=20 ; d=0,01

I/A \ r	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16
5	-82.4	-66.8	-52.5	-39.3	-27.3	-16.1
6	-64.1	-48.5	-34.2	-21.0	-8.9	2.2
7	-48.6	-33.0	-18.7	-5.5	6.6	17.7
8	-35.2	-19.6	-5.3	7.9	20.0	31.1
9	-23.4	-7.7	6.6	19.7	31.8	42.9
10	-12.8	2.8	17.2	30.3	42.4	53.5
11	-3.2	12.4	26.8	39.9	52.0	63.1
12	5.5	21.2	35.5	48.6	60.7	71.9
13	13.6	29.2	43.5	56.7	68.8	79.9
14	21.0	36.7	51.0	64.1	76.2	87.4
15	28.0	43.6	57.9	71.1	83.2	94.3

Tabla 2.e : Variables sensibilizadas: I/A y d  
 Variables predeterminadas: n=20 ; r=0,10

I/A \ d	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
5	-52.5	-25.9	-17.0	-12.6	-9.9	-8.1
6	-34.2	-16.7	-10.8	-7.9	-6.2	-5.0
7	-18.7	-8.9	-5.6	-4.0	-3.0	-2.4
8	-5.3	-2.1	-1.1	-0.6	-0.3	-0.1
9	6.6	3.8	2.9	2.4	2.1	2.0
10	17.2	9.1	6.4	5.1	4.3	3.8
11	26.8	13.9	9.7	7.5	6.3	5.4
12	35.5	18.3	12.6	9.8	8.0	6.9
13	43.5	22.4	15.3	11.8	9.7	8.3
14	51.0	26.1	17.8	13.7	11.2	9.5
15	57.9	29.6	20.2	15.4	12.6	10.7

Tabla 2.f : Variables sensibilizadas: r y d  
 Variables predeterminadas: n=20 ; I/A=10

r \ d	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.05	-21.1	-10.1	-6.4	-4.6	-3.5	-2.8
0.06	-12.8	-5.9	-3.6	-2.5	-1.8	-1.4
0.07	-4.8	-1.9	-1.0	-0.5	-0.2	0.0
0.08	2.8	1.9	1.6	1.5	1.4	1.3
0.09	10.2	5.6	4.1	3.3	2.9	2.6
0.1	17.2	9.1	6.4	5.1	4.3	3.8
0.11	23.9	12.5	8.7	6.8	5.7	4.9
0.12	30.3	15.7	10.9	8.4	7.0	6.0
0.13	36.5	18.8	12.9	10.0	8.2	7.1
0.14	42.4	21.8	14.9	11.5	9.4	8.1
0.15	48.1	24.7	16.9	12.9	10.6	9.0
0.16	53.5	27.4	18.7	14.3	11.7	10.0

Cuadro N° 3

*Signo de las derivadas de  $j$  con respecto a las distintas variables*

Variable	$n = \infty$	$n \neq \infty$	
		Proyectos no repetibles	Proyectos repetibles
I/A	$> 0$	$> 0$	$> 0$
r	$> 0$	$\leq 0$	$> 0$
n		$< 0$	$< 0$
d	$< 0$	$\leq 0$	$< 0$
c	$< 0$	$\leq 0$	$\leq 0$
k	$= -1$	$= -1$	$= -1$
v		$< 0$	$< 0$