

UN NUEVO PROCESO ESTOCASTICO PARA
LA MODELACION DE FENOMENOS ECONOMICOS.
DEFINICION Y ESTIMACION

por RICARDO ANIBAL LEIVA
Profesor Adjunto de Estadística
II de la Facultad de Ciencias
Económicas de la U. N. de Cuyo
y Director del "Grupo de Estadística"
del CRICYT- Mendoza

Resumen

Se definen los procesos estocásticos de nivel más ruido y se sugiere su utilización para la modelación de fenómenos que se desarrollan en el tiempo y que en momentos aleatorios presentan cambios a niveles aleatorios.

Se define el proceso de niveles reales y se halla su estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

1. Introducción

Desde fines del siglo pasado se ha ido produciendo lentamente un cambio fundamental en el enfoque de las investigaciones en todas las disciplinas científicas, llegándose así al convencimiento de que en múltiples situaciones, los modelos probabilísticos son mucho más realistas que los modelos determinísticos. En consecuencia, no existe en la actualidad campo de la ciencia en donde los conceptos de aleatoriedad y probabilidad no intervengan. Si a esto se le suma la necesidad de analizar problemas que se desarrollan en el tiempo, se llega naturalmente a considerar el indeterminismo en estudios dinámi

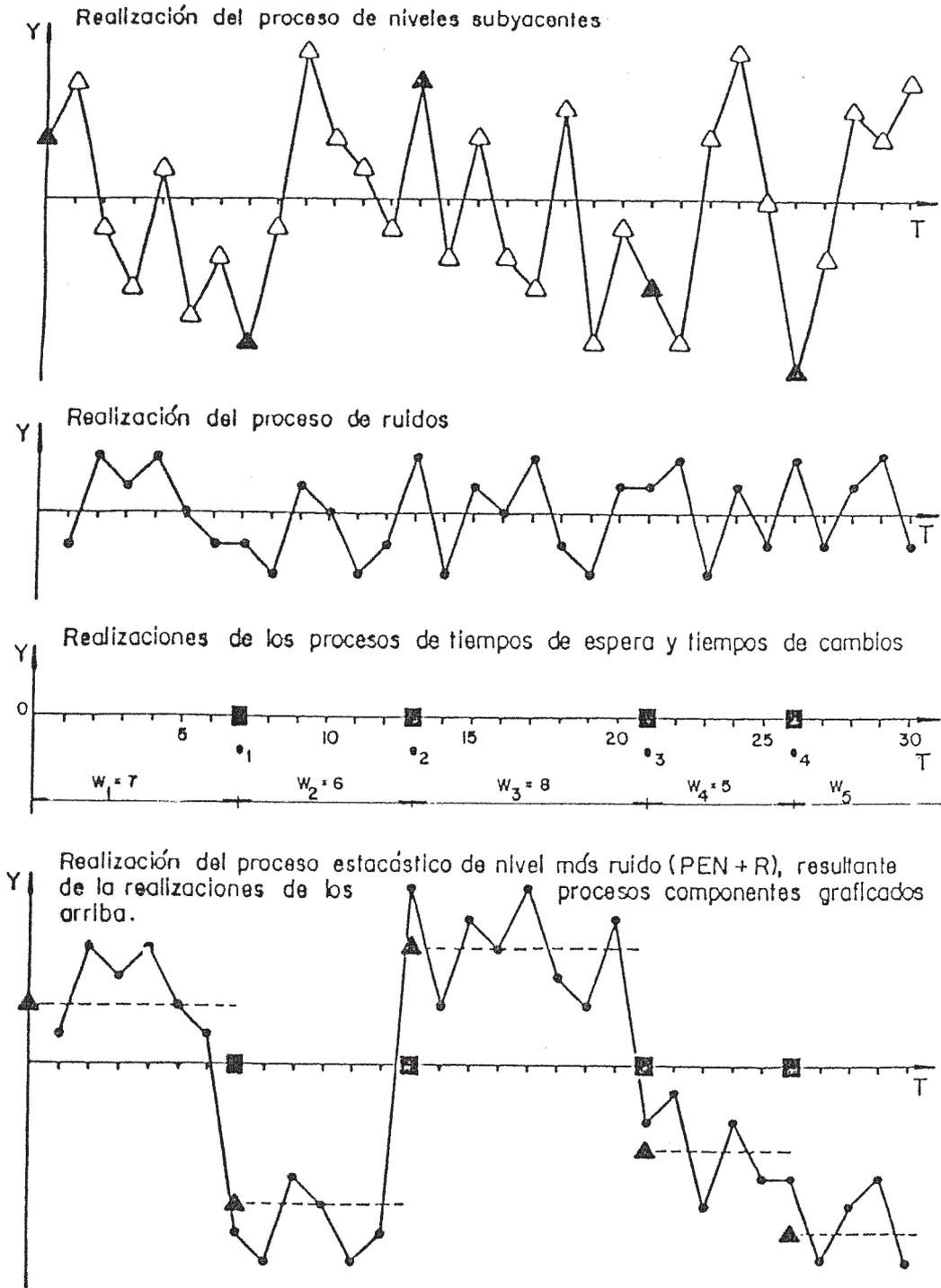
cos. El afán de modelar estos fenómenos (que no solamente son aleatorios sino que también cambian a través del tiempo o el espacio) condujo a la aparición de la teoría de los procesos estocásticos. Dentro de esta teoría es donde se enmarcan los procesos estocásticos de nivel más ruido (PEN + R).

Los PEN + R fueron definidos por Boes y Salas (1978) abarcando casos especiales que habían sido sugeridos antes por Hurst (1957) y Klemes (1974). Si bien es cierto que la formulación inicial de los PEN + R apuntaba al modelamiento de variaciones observadas en los niveles de series de tiempo hidrológicas, su generalidad y flexibilidad unidas a la sencillez para su simulación en computadoras, hacen de estos potenciales candidatos para el modelado de series de tiempo en cualquier otro campo de la ciencia. Como una gran variedad de fenómenos económicos son susceptibles de ser modelados mediante procesos estocásticos, es dable esperar que los PEN + R puedan también ser utilizados ventajosamente en esta disciplina.

2. Definición y ejemplos

La definición de los PEN + R surge de la necesidad de modelar fenómenos que se desarrollan en el tiempo (o espacio) y presentan cambios aleatorios de nivel. En las ciencias aplicadas se observan algunas series de tiempo que luego de fluir en un cierto nivel pasan, a partir de un momento, a moverse en otro nivel debido a causas, desconocidas o no, que ocurren en forma aleatoria. Esta situación de cambios a niveles aleatorios en momentos aleatorios que se reitera con el transcurso del tiempo caracteriza a estas series temporales. Una forma de modelar esta realidad es separando a este complejo fenómeno en procesos más simples que representen cada una de sus componentes.

Figura N° 1



Evidentemente existen tres componentes que gobiernan en forma separada la aleatoriedad presente en estos procesos, a saber:

- 1 - Un proceso de niveles subyacentes que denotaremos por $\{L_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, cuya realización establece para cada tiempo el nivel en el que *puede* estar la realización del PEN + R resultante.
- 2 - Un proceso de ruidos que denotaremos por $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, cuya realización establece las perturbaciones con que se observa en cada tiempo el nivel en que se encuentra la realización del PEN + R.
- 3 - Un proceso de tiempos de espera que denotaremos por $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$, cuya realización establece los tiempos de permanencia de la realización del PEN + R en los distintos niveles alcanzados.

Asociado con este proceso aparece el proceso de los tiempos de cambio que denotaremos por $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ y que está definido por $E_0 \equiv 0$ y $E_k = \sum_{i=1}^k W_i$ para $k=1,2,\dots$. La realización de este proceso determina los momentos en los que se producen los cambios de niveles en la realización del PEN + R.

A partir de las realizaciones no observables de cada uno de los procesos componentes se obtiene la realización observable del PEN + R. A modo de ejemplo, para clarificar la descripción anterior, en la gráfica de la figura N° 1 se observa una realización $\{l_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ del proceso de niveles subyacentes, una realización $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ del proceso de ruidos, una realización $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ del proceso de tiempos de espera (y en consecuencia una realización $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ del proceso de tiempos de cambio) y la realización $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ del PEN + R, que es la resultante de la conjugación de las realizaciones dadas de los tres procesos com

ponentes. Nótese que de la realización del proceso de niveles subyacentes, sólo participan en la realización del PEN + R aquellos niveles (a los que llamaremos niveles reales) que ocurren en los tiempos de cambio, es decir únicamente son considerados aquellos niveles subyacentes que tienen como subíndice a los valores establecidos por la realización $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ (En el gráfico son $\ell_{e_0}^* = \ell_0^*$, $\ell_{e_1}^* = \ell_7^*$, $\ell_{e_2}^* = \ell_{13}^*$, $\ell_{e_3}^* = \ell_{21}^*$ y $\ell_{e_4}^* = \ell_{26}^*$).

Se puede ahora comprender la siguiente definición formal de PEN + R.

Definición 2-1

Sean $\{L_k^*\}_{k=0}^{\infty}$; $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones de variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad (Ω, A, P) tales que:

1 - $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de renovación discreta (con valores en el conjunto N de números naturales), es decir $\{W_k\}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes con valores en N tales que $W_k \sim F_W$ con $E[W] < \infty$ para $k = 1, 2, \dots$

2 - $E[L_k^*] = E[N_k] = 0$ para todo $k \in N$.

Se dice entonces que $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un proceso estocástico de nivel más ruido (PEN + R) discreto, con proceso de niveles subyacentes $\{L_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, proceso de ruidos $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ y proceso de tiempos de espera $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$, si se verifica que Z_n está definido para todo $n \in N$, por:

(2-1) $Z_n = L_{k-1}^* + N_n$ si $E_{k-1} \leq n < E_k$ donde

$$E_0 \equiv 0 \text{ y } E_k = \sum_{i=1}^k W_i \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

Notas

I - De la igualdad (2-1) surge que el nivel correspondiente a todos los Z_n cuyo valor de n es tal que $E_{k-1} \leq n < E_k$ es el mismo L_{k-1}^* ; esto sugiere definir un nuevo proceso formado por los niveles que realmente intervienen en los Z_n . A este proceso de niveles reales lo denotaremos por $\{L_i\}_{i=0}^{\infty}$ y estará definido por:

$$(2.2) L_n = L_{k-1}^* \quad \text{si} \quad E_{k-1} \leq n < E_k$$

Con esta notación, la igualdad (2-1) se reduce a:

$$(2.3) Z_n = L_n + N_n$$

II- Una definición análoga para el caso en que la sucesión $\{W_k\}$ esta formada por variables aleatorias continuas conduce al concepto de PEN + R continuo.

III - En algunos casos (Leiva, 1984 (a)) conviene exigir que $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ sea una sucesión de renovación retardada en equilibrio, es decir $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión de variables aleatorias no negativas con valores en N tal que $W_k \sim F_W$ con $E[W] < \infty$ para $k = 2, 3, \dots$ y $W_1 \sim F_{W_1}$ donde

$$F_{W_1}(x) = \frac{\int_0^x (1 - F_W(t)) dt}{E[W]}$$

IV - Los PEN + R constituyen un caso particular de una clase más amplia de procesos estocásticos, la de los llamados Procesos estocásticos de nivel cambiante (PENC) cuya definición puede verse en Cline (1982). Las propiedades que vinculan a los PENC, y por ende a los PEN + R, con la teoría de procesos estacionarios y con la teoría de martingalas están desarrolladas respectivamente por Leiva (1984 (a) y 1984 (b)).

V - Los PENC, y en particular los PEN + R, están estrechamente relacionados con los siguientes temas de actualidad de la teo-

ría de probabilidad y estadística:

- El problema de punto de cambio (change point problem) estudiado entre otros por Chernoff y Zacks (1964), Kander y Zacks (1966), Gardner (1969), Bhattacharya and Johnson (1968), Sen and Srivastava (1975), Hawkins (1977), Pettitt (1979), Schechtman (1983 a), Yao (1984);
- El problema de la regresión a trozos (piecewise regression) estudiado entre otros por Quandt (1958 y 1960), Inselman y Arsenal (1968) Mc Gee y Carleton (1970), Gallant y Fuller (1973), Brown, Durbin y Evans (1975), Ferreira (1975), Maronna y Yohai (1978), Schechtman (1983b); y
- El problema de extremos en series de tiempo (turning points).

Ejemplos de PEN + R

Para definir un PEN + R basta con especificar cada uno de sus procesos componentes y las relaciones de dependencia entre ellos. Así es como un caso de PEN + R geométrico-normal-normal queda determinado, por ejemplo, por las siguientes especificaciones:

$W_k \stackrel{iid}{\sim} \text{Geométrica}(\pi)$, $L_k^* \stackrel{iid}{\sim} N(0, \rho\sigma^2)$ y $N_k \stackrel{iid}{\sim} N(0, (1-\rho)\sigma^2)$ siendo estas sucesiones independientes entre sí.

Otro caso teórico interesante es considerar que existe no sólo dependencia dentro de los procesos de niveles subyacentes y de ruidos sino también entre ellos. Por ejemplo se puede exigir que tanto el proceso de niveles subyacentes $\{L_k^*\}$ como el proceso de ruidos $\{N_k\}$ sean procesos autorregresivos y que exista una dependencia, homogénea en el tiempo, entre ellos. Una manera de hacer esto es tratando a estos procesos componentes como un proceso autorregresivo bivariado $\{(L_k^*, N_k)\}$.

Cualquier fenómeno económico que evoluciona en el tiempo y está sujeto a cambios a niveles aleatorios producidos por causas que ocurren aleatoriamente en el tiempo puede ser susceptible de modelarse mediante estos procesos. La ventaja de estos procesos es que modelan no sólo las fluctuaciones debidas a ciclos o a perturbaciones aleatorias, sino también a las fluctuaciones esporádicas, es decir las variaciones irregulares (cambios de nivel) provocadas por la presencia de eventos accidentales. Así, por ejemplo, se tienen: las variaciones en la producción agropecuaria causadas por los daños por inundaciones, sequías o plagas; las variaciones de los niveles de la actividad industrial por accidentes o catástrofes; la obsolescencia causada por la innovación tecnológicas y su influencia en procesos productivos; la aparición de la marea roja y su influencia en los niveles de actividad pesquera; etc.

3. Proceso de niveles reales

En la nota I que sigue a la definición (2-1) se definió mediante la igualdad (2-2) al proceso $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ que denominamos proceso de niveles reales. En esta definición están involucrados tanto el proceso de niveles subyacentes $\{L_k^*\}$ como el proceso de tiempos de cambio $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$, por lo que resulta necesario relacionar las características del proceso $\{L_k\}$ con las de estos dos procesos componentes. Para facilitar la lectura de ésta y de la siguiente sección sólo se presentan los enunciados de los teoremas que establecen los resultados, dejando sus demostraciones para el apéndice.

Para comenzar conviene establecer ciertas definiciones vinculadas con el proceso de tiempos de cambio $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Definición 3-1

Dados, $h, k \in \mathbb{N}$ con $h \leq k$ y dado v tal que $0 \leq v \leq k - h$ se dice que h y k son v próximos respecto del proceso de tiempos de cambio $\{E_k\}$ si y sólo si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $E_{i-1} \leq h < E_i$ y $E_{i+v-1} \leq k < E_{i+v}$.

Notar que el enunciado " h, k son v próximos" define un evento aleatorio y en consecuencia tiene sentido preguntar se cuál es la probabilidad de ocurrencia de dicho evento.

Para ellos utilizaremos el proceso de renovación $\{R(i) : i \in \mathbb{N}\}$ (ver Cinlar (1975), Ross (1970)) definido por $R(i) = \sup \{m : E_m \leq i\}$, es decir $R(i)$ cuenta el número de cambios (renovaciones) que ocurren hasta el momento i , en consecuencia $R(i) = n \Leftrightarrow E_n \leq i < E_{n+1}$.

Se puede entonces deducir (ver apéndice parte 1) que para k, h y v como en la definición 3-1 es

$$(3-1) \Pr [h \text{ y } k \text{ sean } v\text{-próximos}] = \Pr [R(k-h) = v]$$

de donde

$$\Pr [h \text{ y } k \text{ son } v\text{-próximos}] = \begin{cases} 1 - F_W(k-h) & \text{si } v = 0 \\ F_V(k-h) - F_{V+1}(k-h) & \text{si } v = 1, 2, \dots \end{cases}$$

donde $F_V(t) = \Pr [E_V \leq t]$

En el caso en que $\{W_k\}$ es una sucesión de renovación retardada en equilibrio, es

$$\Pr [h \text{ y } k \text{ son } v\text{-próximos}] = \begin{cases} 1 - F_{W_1}(k-h) & \text{si } v = 0 \\ F_{W_1} * F_{V-1}(k-h) - F_{W_1} * F_V(k-h) & \text{si } v = 1, 2, \dots \end{cases}$$

con $F_{W_1} * F_0 = F_{W_1}$ y donde $*$ indica convolución.

Con estos resultados es fácil demostrar el siguiente teorema que establece una relación entre el proceso de niveles reales y los procesos de niveles subyacentes y de tiempos de espera.

Teorema 3-1

Sean los procesos $\{L_k^*\}$ y $\{W_k\}$ como en la definición 2-1 y supongamos además que son independientes entre sí y que $\{L_k^*\}$ es débilmente estacionario, denotando por $\sigma_k^* = \text{Cov}(L_i^*, L_{i+k}^*)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Bajo estas condiciones el proceso de niveles reales $\{L_k\}$ es también débilmente estacionario con media 0 y autocovarianza dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{hk} = \text{Cov}[L_h, L_k] &= \sum_{v=0}^{|k-h|} \sigma_v^* \text{Pr}[h \text{ y } k \text{ sean } v\text{-próximos}] = \text{por (3-1)} \\ &= \sum_{v=0}^{|k-h|} \sigma_v^* \text{Pr}[R(|k-h|) = v] \end{aligned}$$

(Ver demostración en la parte 2 del apéndice).

4. Estimación del proceso de niveles reales

Los PEN + R constituyen un modelo teórico susceptible de ser postulado para fenómenos que ocurren en las más diversas disciplinas de la ciencia. Sin embargo, para poder efectivamente aplicarlos a datos concretos es necesario considerar a estos procesos desde el punto de vista estadístico. Como consecuencia de las distintas necesidades del usuario aparecen diversos problemas de estimación. El interés puede estar en la estimación, a partir de los datos de una realización de un PEN + R, ya sea de algunos de los parámetros de los procesos componentes o de los niveles reales cuando aque-

llos parámetros son conocidos. En esta sección nos ocupamos únicamente de este último caso, y concretamente nos proponemos encontrar el "mejor" estimador lineal de una combinación lineal cualquiera del vector $L' = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, basándonos en el vector observable $Z' = (Z_1, \dots, Z_n)$ y suponiendo conocidos los parámetros de los procesos componentes. Dada una combinación lineal cualquiera $a'L$ donde $a \in R^n$, entendemos por su mejor estimador lineal a una combinación lineal $b'Z$ con $b \in R^n$, que minimice el error cuadrático medio $E[(b'Z - a'L)^2]$. Para ello es conveniente adoptar la siguiente notación:

$$a' = (a_1, a_2, \dots, a_n) ; b' = (b_1, \dots, b_n) \in R^n, Z' = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$$

$$\Sigma_L = (\sigma_{hk}) = \text{matriz de varianza-covarianza de } L' = (L_1, L_2, \dots, L_n)$$

$$\Sigma_N = (\gamma_{hk}) = \text{matriz de varianza-covarianza de } N' = (N_1, N_2, \dots, N_n)$$

$$\Sigma_{LN} = \text{covarianza de } L \text{ con } N; B = \Sigma_L + \Sigma_{LN}, D = \Sigma_N + \Sigma_{NL} \text{ y } A = B + D$$

En lo que sigue suponemos que la matriz A es invertible para evitar el uso de inversas generalizadas. Notar que $A = \Sigma_Z = \Sigma_{L+N}$.

Teorema 4-1

Sean $\{L_k\}$, $\{N_k\}$ y $\{W_k\}$ los procesos respectivamente de niveles reales, de ruidos y de tiempos de espera correspondientes a un PEN + R $\{Z_k\}$, tales que el proceso de tiempos de espera es independiente de los otros dos procesos componentes. Con la notación anterior, el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio para $a'L$ es $b'Z$ donde $b = A^{-1} B'a = (I - A^{-1} D') a$ y para este valor de b es

$$E[(b'Z - a'L)^2] = a' (\Sigma_N - DA^{-1} D') a = a' (\Sigma_L - BA^{-1} B') a$$

(Ver demostración en la parte 3 del apéndice).

En particular para obtener el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio del nivel real correspondiente al tiempo t hay que tomar $a' = e'_t = (e_{1t}, \dots, e_{nt})$

con $e_{it} = \delta_{it} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq t \\ 1 & \text{si } i = t \end{cases}$, con lo cual llamando

$M \doteq (m_{ij}) \doteq \Sigma_N - D A^{-1} D'$ resulta

$\hat{L}_t = e'_t \cdot B \cdot A^{-1} \cdot Z = (t\text{-ésima columna de } A^{-1}B')$. Z con

$E[(\hat{L}_t - L_t)^2] = e'_t M e_t = m_{tt} = t\text{-ésima componente de la diagonal de } M$.

En consecuencia, una posible medida del error promedio que se comete al estimar el vector $L' = (L_1, \dots, L_n)$ es

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[(\hat{L}_t - L_t)^2] = \frac{\text{traza}(M)}{n}$$

Ejemplo

Consideremos el caso en que $\{W_i\}$ es tal que $W_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Geométrica}(\pi)$, o sea $P[W_i = n] = (1 - \pi)^{n-1} \cdot \pi$ para $n = 1, 2, \dots$

Se puede pensar que estas variables surgen de la existencia en cada $n \in N$ de una variable Bernoulli con parámetro π que indica la aparición o no de una renovación en ese punto. Desde este punto de vista es fácil ver que el número de renovaciones hasta el momento h , con $h \in N$ fijo, tiene una distribución binomial con parámetros π y h , es decir $\Pr[R(h)=v] = \binom{h}{v} \pi^v (1-\pi)^{h-v}$.

Supongamos además que el proceso de niveles subyacentes $\{L_k^*\}$ es débilmente estacionario con media 0 y $\text{Cov.}(L_i^*, L_{i+k}^*) = \sigma_k^* = \sigma^2 \rho^k$ para $k=0, 1, \dots$ (por ejemplo este será el caso si $\{L_k^*\}$ es el proceso autorregresivo de orden 1 dado por

$L_k^* = \rho L_{k-1}^* + e_k$ con $|\rho| < 1$). Se obtiene entonces que

$$\begin{aligned} \sigma_{hk} &= \text{Cov}(L_h, L_k) = \sum_{v=0}^{|k-h|} \sigma_v^* P[R(|k-h|) = v] = \sigma^2 E[\rho^{R(|k-h|)}] = \\ &= \sigma^2 [(1-\pi) + \rho\pi]^{|k-h|} = \sigma^2 \alpha^{|k-h|} \text{ donde } \alpha = (1-\pi) + \rho\pi. \end{aligned}$$

Sabemos que el estimador lineal \hat{L}_i de mínimo error cuadrático medio para el i -ésimo nivel real L_i está dado por

$$\hat{L}_i = e_i' B' A^{-1} Z \text{ donde } B = \Sigma_L + \Sigma_{LN} \text{ y } A = B + D = \Sigma_L + \Sigma_{LN} + \Sigma_N + \Sigma_{NL}$$

además es $E[(\hat{L}_i - L_i)^2] = e_i' M e_i$ donde $M = \Sigma_N - D A^{-1} D'$.

Supongamos que el proceso de ruidos $\{N_k\}$ es independiente del $\{L_k\}$ y que $\Sigma_N = \{\gamma^2 \beta^{|i-j|}\}$ entonces resulta que $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = \sigma^2 \alpha^{|i-j|} + \gamma^2 \beta^{|i-j|}$ (En particular cuando $\beta = 0$ y $\gamma^2 = 1$ es $a_{ij} = \delta_{ij} + \sigma^2 \alpha^{|i-j|}$ con lo cual el estimador lineal \hat{L}_i resulta simplemente $\hat{L}_i = e_i' A^{-1} Z$).

5. Apéndice

1 - Para $h \leq k$ y $0 \leq v \leq k-h$ es

$$\begin{aligned} \text{Pr}[h, k \text{ sean } v\text{-próximos}] &= \sum_{i=1}^{h+1} P[E_{i-1} \leq h < E_i, E_{i+v-1} \leq k < E_{i+v}] = \\ &= \sum_{i=1}^{h+1} \text{Pr}[R(h) = i-1, R(k) = i+v-1] = \sum_{i=1}^{h+1} \text{Pr}[R(k) - R(h) = v, R(h) = i-1] \\ &= \text{Pr}[R(k-h) = v] \sum_{i=1}^{h+1} \text{Pr}[R(h) = i-1] = \text{Pr}[R(k-h) = v]. \end{aligned}$$

2 - Demostración teorema 3-1

Si suponemos $h \leq k$ y si con I_C denotamos la función característica (o indicadora) del conjunto C , es decir

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin C \\ 1 & \text{si } x \in C \end{cases} \text{ entonces}$$

$$\sigma_{hk} = E[L_h \cdot L_k] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{h+1} L_{i-1}^* I_{[E_{i-1}^{(h)}, E_i)}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} L_{j-1}^* I_{[E_{j-1}^{(k)}, E_j)}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{h+1} \sum_{j=i}^{k-h+i} E[L_{i-1}^* \cdot L_{j-1}^*] E[I_{[E_{i-1}^{(h)}, E_i)} \cdot I_{[E_{j-1}^{(k)}, E_j)}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{h+1} \sum_{j=i}^{k-h+i} \sigma_{j-i}^* \Pr[E_{i-1} \leq h < E_i, E_{j-1} \leq k < E_j] =$$

$$= \sum_{v=0}^{k-h} \sigma_v^* \sum_{i=1}^{h+1} \Pr[E_{i-1} \leq h < E_i, E_{i+v-1} \leq k < E_{i+v}] =$$

$$= \sum_{v=0}^{k-h} \sigma_v^* \Pr[h, k \text{ sean } v\text{-próximos}].$$

3 - Demostración teorema 4-1

Dados a , Σ_L , Σ_N y Σ_{LN} se quiere encontrar un valor de b que minimice $\varphi(b) = E[b'Z - a'L]^2$.

Denotando con d al vector $b-a$, notemos primero que por (2-3) es $Z = L + N$ y en consecuencia $(b'Z - a'L)^2 = (d'L + b'N)(d'L + b'N)' = d'LL'd + b'NN'b + 2d'LN'b$ de donde

$$\varphi(b) = d'\Sigma_L d + b'\Sigma_N b + 2d'\Sigma_{LN} b = g'\Sigma g \text{ donde}$$

$$g' = (d', b') \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_L & \Sigma_{LN} \\ \Sigma_{NL} & \Sigma_N \end{bmatrix}$$

Derivando $\varphi(b)$ respecto de b e igualando a 0 se obtiene

$$\frac{\delta \varphi}{\delta b} = \frac{\delta}{\delta b} (b'Ab - 2 a'Bb + a'\Sigma_L a) = 2Ab - 2B'a = 0$$

cuya solución es

$$(5-1) \quad b = A^{-1} B'a = (I - A^{-1}D') a.$$

Esta última expresión de b sugiere considerar la siguiente forma cuadrática

$$q(b) = [(b-a) + A^{-1}D'a]' A [(b-a) + A^{-1}D'a].$$

Desarrollando $q(b)$, sumando y restando $a'\Sigma_N a$ y agrupando adecuadamente, resulta

$$q(b) = \varphi(b) - K \quad \text{donde } K = a' (\Sigma_N - D A^{-1}D') a.$$

De donde se deduce que el mínimo de $\varphi(b)$ se obtiene para el valor de b que hace $q(b) = 0$, o sea el b definido por (5-1) y que el valor mínimo de φ es la constante K .

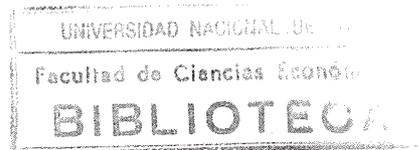
$$\begin{aligned} \Sigma_N - D A^{-1}D' &= \Sigma_N - (A-B) A^{-1}(A-B)' = \Sigma_N - A' - B A^{-1}B' + A A^{-1}B' + B A^{-1}A' \\ &= \Sigma_N - (\Sigma_N + \Sigma_{NL} + B) - B A^{-1}B' + B' + B = -\Sigma_{NL} + B' - B A^{-1}B' = \Sigma_L' - B A^{-1}B' \\ &= \Sigma_L - B A^{-1}B'. \end{aligned}$$

Lo que demuestra la otra expresión de K .

Bibliografía

- BHATTACHARYA, G. K.; JOHNSON, R. A., *Non-parametric Tests for Shift at an Unknown Time Point*, Annals of Mathematical Statistics, n° 39 (1968), págs. 1731-43.
- BOES, D.C.; SALAS, J. D., *Non Stationarity of the Mean and the Hurst Phenomenon*, Water Resources Research n° 14 (1) (1978), págs. 135-43.

- BROWN, R. L., DURBIN, J., EVANS, J. M., *Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time*, en *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological*, n° 37 (1975), págs. 149-92.
- CHERNOFF, H., ZACKS, S., *Estimating the Courrent Mean of a Normal Distribution which is subject to Changes in Time*, en *Annals of Mathematical Statistics*, n° 35 (1964), págs. 999-1028.
- CINLAR, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Inc. (1975).
- CLINE, D. B. H., *Limit Theorems for the Shifting Level Process*, en *Journal of Applied Probability*, n° 20 (1983), págs. 322-37.
- FERREIRA, P. E., *A Bayesian Analysis of Switching Regression Model: known Number of Regimes*, en *Journal of the American Statistical Association*, n° 70 (1975), págs. 370-4.
- GALLANT, A. R., FULLER, W. A., *Fitting Segmented Polynomial Regression Models whose Join Points have to be estimated*, en *Journal of the American Statistical Association*, n° 68 (1973), págs. 144-7.
- GARDNER, L. A., *On detecting Changes in the Mean of Normal Variates*, en *Annals of Mathematical Statistics*, n° 40 (1969), págs. 116-26.
- HAWKINS, D. M., *Testing a Sequence of Observation for a Shift in Location*, en *Journal of the American Statistical Association*, n° 72 (1977), págs. 180-6.
- HURST, H. E., *A Suggested Model of Some Time Series which occur in Nature*, *Nature* n° 180 (1957), págs. 494.
- INSELMAN, E. H., ARSENAL, F., *Tests for Several Regression Equations*, en *Annals of Mathematical Statistics*, n° 39 (1968), pág. 1362.
- KANDER, A., ZACKS, S., *Test Procedures for Possible Changes Parameters of Statistical Distributions occurring at Unknown Time Points*, en *Annals of Mathematical Statistics*, n° 37 (1966), págs. 1196-210.
- KLEMES, V., *The Hurst phenomenon: a puzzle?* en *Water Resource Research*, n° 10 (4) (1974), págs. 675-88.



- LEIVA, R., A., *Procesos de nivel cambiante estacionarios*, Comunicaciones XII Coloquio Argentino de Estadística, Bahía Blanca (1984 a).
- LEIVA, R. A., *Shifting Level Process and Martingale*, en Comunicaciones XII Coloquio Argentino de Estadística, Bahía Blanca (1984 b).
- MARONNA, R., YOHAI, V. J., *A Bivariate Test for the Detection of a Systematic Change in the Mean*, en Journal of the American Statistical Association, n° 73 (1978), págs. 640-5.
- MC GEE, V. E., CARLETON, W. I., *Piecewise Regression*, en Journal of the American Statistical Association, n° 65 (1970), págs. 1109-24.
- PETTITT, A. N., *A non-parametric Approach to the Change Point Problem*, en Applied Statistics, n° 28 (1979), págs. 126-35.
- QUANDT, R. E., *The estimation of the Parameters of a Linear Regression System obeys Two Separate Regimes*, en Journal of the American Statistical Association, n° 53 (1958), págs. 873-80.
- QUANDT, R. E., *Tests of Hypothesis that a Linear Regression System obeys Two Separate Regimes*, en Journal of the American Statistical Association, n° 55 (1960), págs. 324-30.
- ROSS, S. M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, en Hodeln-Day, San Francisco (1970).
- SCHECHTMAN, E., *A Conservative nonparametric Distribution-free confidence Bound for the Shift in the Change Point-Problem*, en Communications in Statistics. Theory and Methods, n° 12 (21) (1983 a), págs. 2455-2464.
- SCHECHTMAN, E., *Inference in Two-phase Regression: A Simulation Study with non-Normal Observations*, en Journal of Statistical Computation and Simulation, n° 17 (1983, b), págs. 223-9.
- SEN, A., SRIVASTAVA, M. S., *On Tests for detecting Changes in Mean*, en Annals of Statistics, n° 3 (1975), págs. 98-108.

YAO, Y. C., *Estimation of a Noisy Discrete-Time Step Function: Bayes and Empirical Bayes Approaches*, en *Annals of Statistics*, n° 12 (1984), págs. 1434-47.

Agradecimientos

El autor agradece a aquellos docentes e investigadores que leyeron el manuscrito y que con sus comentarios contribuyeron a que esta versión final, pacientemente dactilografiada por Adriana Buglio y María Elena Soler, sea mejor que la original.