

LA TASA DE AMORTIZACION Y LOS SISTEMAS INDEXADOS

por ELISEO CESAR TULIAN
Profesor Asociado a cargo de
Matemática II e Introducción
al Procesamiento de Datos de
la Facultad de Ciencias Econó-
micas de la U.N. de Cuyo.

A. Tasa de amortización

La tasa de amortización se define como la cantidad amortizada en el primer período para una deuda de un peso.

En otras palabras, la tasa de amortización se define como el tanto por uno de la deuda que se amortiza con la primer cuota pagada.

Si en el llamado *sistema francés* tenemos en cuenta que:

$$V = c \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

y que la amortización del primer período resulta de la diferencia entre la cuota y el interés de la deuda inicial:

$$t_1 = c - Vi$$

de acuerdo a la definición, la tasa de amortización es:

$$\theta = \frac{t_1}{V} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i$$

Luego de resolver la diferencia indicada:

$$\theta = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad (1)$$

Así, si una deuda se amortiza mediante doce cuotas al cinco por ciento de interés periódico:

$$\theta = \frac{0,05}{1,05^{12} - 1} = 0,06282541$$

por lo tanto, aproximadamente el 6,28 por ciento de la deuda se amortiza en el primer período.

B. La tasa de amortización y el saldo de la deuda

Un sistema de amortización puede ser concebido como una sucesión de deudas que se renuevan periódicamente. De esa forma resulta:

$$V_k = c \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i(1+i)^{n-k}} \quad (2)$$

Es decir, el saldo de la deuda después del pago número k es la deuda que puede amortizarse con las $n - k$ cuotas restantes.

En consecuencia, puede definirse una tasa de amortización para cada período. En tal situación, la tasa periódica de amortización será el tanto por uno del último saldo que se amortiza con la cuota siguiente.

$$\theta_k = \frac{t_{k+1}}{V_k} \quad (3)$$

La amortización del período $k + 1$ puede expresarse:

$$t_{k+1} = t_1(1+i)^k = (c - Vi)(1+i)^k$$

$$t_{k+1} = c(1+i)^k - Vi(1+i)^k$$

$$t_{k+1} = c(1+i)^k - c \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-k}} \quad (4)$$

Si reemplazamos (2) y (4) en (3):

$$\theta_k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^{n-k} - 1} - \frac{i(1+i)^n - i}{(1+i)^{n-k} - 1}$$

$$\theta_k = \frac{i}{(1+i)^{n-k} - 1} \quad (5)$$

Se llega a la misma expresión si en (1) se sustituye n por $n - k$.

C. La indexación del saldo

En los sistemas indexados se ajustan periódicamente la cuota y el saldo de la deuda.

Al momento del vencimiento del pago número k , la actualización del último saldo será:

$$V_{k-1}^* = V_{k-1}(1+\psi)$$

donde ψ es la tasa de inflación del período tomada como tasa de ajuste.

Efectuado el pago, el nuevo saldo será:

$$V_k = V_{k-1}^* - t_k$$

La amortización a deducir se obtiene restando de la cuota ajustada el interés del último saldo indexado:

$$t_k = c_k - V_{k-1}^* i$$

D. El crecimiento del saldo

Si bien en términos reales el saldo de la deuda es siempre decreciente, en términos nominales puede no serlo.

Sobre el último saldo de la deuda para cualquier período actúan dos fuerzas opuestas. Por un lado, la indexación produce un aumento del saldo. Por otro, la amortización del período determina una disminución.

El signo del incremento neto de las variaciones determinará el crecimiento o decrecimiento del nuevo saldo con respecto al anterior.

De la comparación entre la tasa de inflación y la tasa de amortización podemos deducir el signo del incremento del saldo.

Sin embargo, es preciso tener en cuenta que, mientras la tasa de inflación actúa sobre el saldo anterior como una tasa de interés o tasa vencida, la tasa de amortización actúa como una tasa de descuento o tasa adelantada.

Las dos variaciones se neutralizarán entre sí, cuando la tasa de amortización sea igual a la tasa de descuento equivalente a la tasa de inflación.

E. Comparación entre las tasas

La tasa de descuento equivalente a la tasa de inflación es:

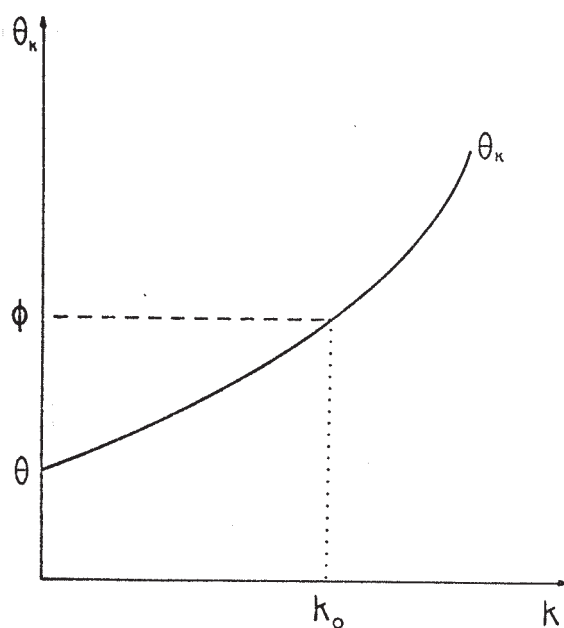
$$d = \frac{\psi}{1 + \psi} \quad (6)$$

Para simplificar, supondremos que la tasa de inflación permanece constante.

La tasa periódica de amortización:

$$\theta_k = \frac{i}{(1+i)^{n-k} - 1} \quad (7)$$

es una función creciente a ritmo creciente del número de períodos transcurridos, pues sus derivadas primera y segunda respecto de k son positivas.



A partir del período k_0 la tasa de amortización es superior a ϕ . En consecuencia, a partir de ese período disminuirá el saldo de la deuda en términos nominales.

Es evidente que si la tasa de amortización inicial θ es superior a la tasa ϕ , el saldo de la deuda será siempre decreciente.

Para el caso más general, k se determina igualando las expresiones (6) y (7):

$$\frac{\psi}{1 + \psi} = \frac{i}{(1 + i)^{n-k} - 1}$$

$$(1 + i)^{n-k} = \frac{1 + \psi}{\psi} i + 1$$

$$n - k_0 = \frac{1}{\ln(1 + i)} \ln \left| \frac{1 + \psi}{\psi} i + 1 \right| \quad (8)$$

Aplicaremos esta expresión a un ejemplo. Una deuda se amortiza mediante 60 cuotas mensuales por el sistema francés indexado, con un interés mensual del 0,5 por ciento. Supóngase una inflación constante a razón de 5 % mensual.

$$n - k_0 = \frac{1}{\ln 1,005} \ln \left| \frac{1,05}{0,05} 0,005 + 1 \right| = 20,019$$

Para $n = 60$, resulta $k_0 = 39,981$. Para este valor de k la tasa de amortización iguala a la tasa ϕ . Como no tiene sentido un valor no entero, en todos los casos debe redondearse al entero inmediato superior. En el ejemplo considerado, luego del pago número 40 comienza a decrecer el saldo de la deuda, en términos nominales.

Obsérvese que en (8) hemos planteado la diferencia $n - k_0$ en lugar de k_0 . Esto es así porque el decrecimiento del saldo se produce de acuerdo a la cantidad de períodos que restan y no al número de períodos transcurridos. En el ejemplo planteado, el resultado es el mismo independientemente de la cantidad total de cuotas del sistema: el saldo decrece cuando restan 20 cuotas.

F. El sistema alemán indexado

La misma definición de tasa de amortización puede apli

carse al sistema de amortización constante, conocido como sistema alemán.

La amortización será:

$$t = \frac{V}{n}$$

para cualquier período. La tasa de amortización inicial se plantea como el cociente entre la amortización y la deuda inicial:

$$\theta = \frac{t}{V} = \frac{V}{n} \frac{1}{V} = \frac{1}{n}$$

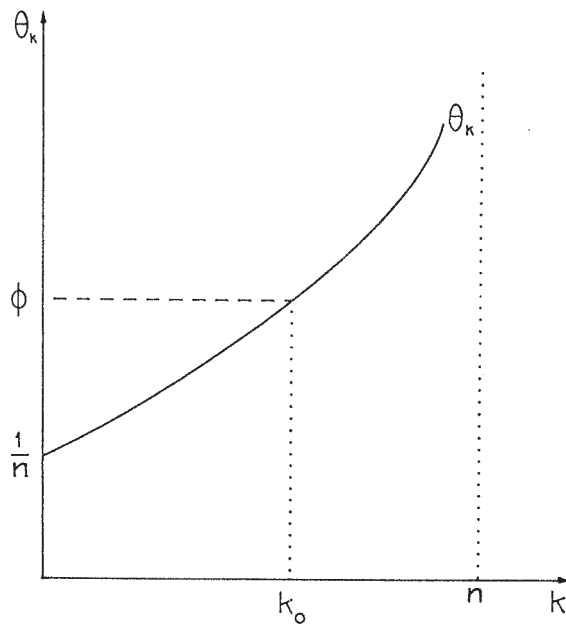
Es decir, con la primera cuota se amortiza la enésima parte de la deuda.

La tasa periódica de amortización será el cociente entre la amortización constante y el último saldo:

$$\theta_k = \frac{t}{V_k} = \frac{t}{V - k t} = \frac{V}{n} \frac{1}{V - \frac{k V}{n}} = \frac{1}{n - k} \quad (8')$$

La gráfica de la función θ_k es una hipérbola equilátera de asíntotas $\theta_k = 0$ y $k = n$.

Como en el sistema anterior, si la tasa inicial de amortización θ es superior a ϕ , el saldo será siempre decreciente. De lo contrario, habrá que determinar un valor k_0 para el que la función θ_k , siempre creciente, iguale a la tasa ϕ , supuestamente constante.



El valor de k_0 se determina igualando (6) y (8'):

$$\frac{\psi}{1 + \psi} = \frac{1}{n - k}$$

$$n - k_0 = \frac{1 + \psi}{\psi}$$

Supuesta una inflación constante del 5 % mensual, para cualquier valor de n :

$$n - k_0 = \frac{1,05}{0,05} = 21$$

Cuando resten 21 períodos la tasa θ será igual a ϕ y

el saldo luego del pago siguiente será igual al saldo anterior.

Obsérvese que, a diferencia del sistema francés, en el sistema de amortización constante la determinación de k_0 es independiente de la tasa de interés i .

G. Indexación con interés nulo

En el primero de los sistemas analizados, la determinación del período a partir del cual el saldo de la deuda decrece depende del valor de la tasa de interés i .

Cuando el interés es nulo, los sistemas francés y alemán se confunden. En los dos la cuota resulta la enésima parte de la deuda.

En la expresión (7) el límite para i tendiendo a cero es:

$$\lim_{i \rightarrow 0} \theta_k = \frac{1}{n - k}$$

que es la tasa periódica de amortización del sistema alemán.

En consecuencia, en un sistema de interés nulo, el saldo de la deuda, como en el sistema de amortización constante, decrece a partir de:

$$k = n - \frac{1 + \psi}{\psi}$$

H. Análisis de sensibilidad

Dos variables intervienen en la determinación de k_0 en el sistema francés: la tasa de interés i y la tasa de inflación ψ . Analizaremos a continuación la sensibilidad de la solución del problema planteado frente a variaciones producidas en dichas variables.

1. Con relación a la tasa de interés

La sensibilidad de $n - k$ con relación a la tasa de

interés puede determinarse por medio de la elasticidad.

Definida la elasticidad como el cociente entre los incrementos relativos, en nuestro caso será (8):

$$E_{n-k}^i = \frac{i}{1n(1+i)} \left[\frac{1}{(\phi + i)(n-k)} - \frac{i}{1+i} \right] \quad (9)$$

Según ya vimos, para el 0,5 por ciento de interés y el cinco por ciento de inflación resulta:

$$n - k = 20,019$$

Llevados estos valores a (9), resulta:

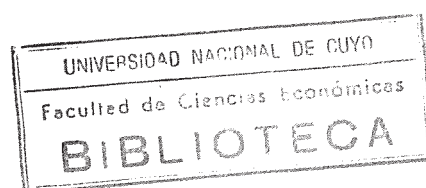
$$E_{n-k}^i = - 0,0458$$

Es decir, ante un aumento porcentual de la tasa de interés, $n - k$ disminuye en poco más del 4 por ciento de dicho aumento porcentual. Por ejemplo, si se incrementa la tasa de interés al 0,6 % el nuevo valor de $n - k$ es 19,835.

La poca sensibilidad de $n - k$ con relación a la tasa de interés se puso de manifiesto en los ejemplos desarrollados anteriormente. Con una inflación del 5 por ciento y un interés del 0,5 por ciento el saldo disminuye cuando restan 20 cuotas, cualquiera sea el número total de períodos del sistema. Para la misma tasa de inflación, pero con interés nulo, el decrecimiento del saldo sólo se anticipa un período.

La magnitud de la tasa de inflación tiene que ver con la poca elasticidad de $n - k$ con respecto a i . En efecto, si suponemos una indexación del uno por ciento mensual y el mismo in-

(8) Ver apéndice.



terés, la elasticidad será:

$$E_{n-k}^i = -0,8158$$

El valor absoluto de la elasticidad es mayor cuando menor es la indexación.

2. Con relación a la tasa de inflación

Hasta ahora hemos supuesto una tasa de inflación constante. Veremos ahora qué variación en la tasa de inflación puede modificar la solución al problema planteado.

Llamaremos ψ_0 a la tasa de inflación supuesta para la determinación de k_0 y ψ_1 a la tasa del período siguiente.

Si la inflación permanece constante en ψ_0 en el período $k_0 + 1$ la tasa de amortización superará a la tasa de inflación y el saldo de la deuda disminuirá. Determinaremos ψ_1 de modo que tal situación no se dé.

$$\frac{\psi_0}{1 + \psi_0} = \frac{i}{(1 + i)^{n-k} - 1} \quad (10)$$

$$\frac{\psi_1}{1 + \psi_1} = \frac{i}{(1 + i)^{n-k-1} - 1} \quad (11)$$

Con esta última expresión, la tasa de descuento equivalente a la tasa de inflación iguala a la tasa de amortización en el período $k_0 + 1$ y el saldo no disminuye.

De (10):

$$(1 + i)^{n-k} = \frac{1 + \psi_0}{\psi_0} i + 1$$

De (11):

$$(1 + i)^n \cdot k \cdot 1 = \frac{1 + \psi_1}{\psi_1} \cdot i + 1$$

En consecuencia:

$$\frac{1 + \psi_1}{\psi_1} \cdot i + 1 = \frac{1}{1 + i} \left[\frac{1 + \psi_0}{\psi_0} \cdot i + 1 \right]$$

de donde:

$$\psi_1 = \frac{\psi_0 (1 + i)}{1 - \psi_0 (1 + i)}$$

que, en términos relativos será:

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{1 + i}{1 - \psi_0 (1 + i)}$$

y expresado el incremento como tasa:

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} - 1 = \frac{i + \psi_0 (1 + i)}{1 - \psi_0 (1 + i)}$$

Desarrollaremos un ejemplo. Supongamos un sistema en el que la tasa de amortización neutraliza a la tasa de descuento equivalente al cinco por ciento de indexación en período k_0 . Con un interés del 0,5 por ciento, el incremento de la tasa de

inflación será:

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_0} - 1 = \frac{0,005 + 0,05025}{1 - 0,05025} = 0,058$$

Es decir, si la tasa de inflación crece a razón del 5,8 por ciento de su valor anterior, el saldo de la deuda crece permanentemente.

Podemos hacer el mismo análisis para el sistema de amortización constante. Según vimos:

$$\frac{1 + \Psi_0}{\Psi_0} = n - k \quad (12)$$

y para el período siguiente:

$$\frac{1 + \Psi_1}{\Psi_1} = n - k - 1 \quad (13)$$

De (12) y (13):

$$\frac{1 + \Psi_0}{\Psi_0} = \frac{1 + \Psi_1}{\Psi_1} + 1$$

de donde la tasa de incremento es:

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_0} - 1 = \frac{\Psi_0}{1 - \Psi_0}$$

Si para una inflación del cinco por ciento el saldo decrece a partir del período k_0 , un incremento en la tasa de inflación:

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} - 1 = \frac{0,05}{0,95} = 0,0526$$

neutralizará el decrecimiento del saldo.

Apéndice

A. Elasticidad de $n - k$

La cantidad de períodos $n - k$ es un cociente de dos funciones.

$$n - k = \frac{\ln \left[\frac{1+\psi}{\psi} i + 1 \right]}{\ln (1 + i)}$$

La elasticidad del cociente entre las funciones es la diferencia entre las elasticidades de dichas funciones.

La elasticidad de la función logarítmica $y = \ln f(x)$ es:

$$E_y^x = \frac{x}{\ln f(x)} \frac{f'(x)}{f(x)}$$

En consecuencia:

$$E_{n-k}^i = \frac{i}{\ln \left[\frac{1+\psi}{\psi} i + 1 \right]} \frac{1+\psi}{\frac{1+\psi}{\psi} i + 1} - \frac{i}{\ln (1+i)} \frac{1}{1+i}$$

$$E_{n-k}^i = \frac{i}{(n-k) \ln(1+i)} \frac{1+\psi}{(1+\psi)i+\psi} - \frac{i}{\ln(1+i)} \frac{1}{1+i}$$

$$E_{n-k}^i = \frac{i}{\ln(1+i)} \left[\frac{i}{(n-k)(i+\phi)} - \frac{1}{1+i} \right]$$

B. Desarrollo de un sistema

La siguiente tabla muestra la evolución del saldo en un sistema de amortización constante de treinta cuotas. Se supone una indexación constante a razón del cinco por ciento.

k	V _k	k	V _k	k	V _k
1	9.187.500	13	10.842.483	25	9.312.476
2	9.371.250	14	10.889.624	26	8.889.182
3	9.550.407	15	10.914.373	27	8.400.277
4	9.724.053	16	10.914.373	28	7.840.259
5	9.891.182	17	10.887.087	29	7.203.237
6	10.050.717	18	10.829.786	30	6.482.914
7	10.202.487	19	10.739.539	31	5.672.549
8	10.342.188	20	10.613.191	32	4.764.942
9	10.471.465	21	10.447.359	33	3.752.391
10	10.587.815	22	10.238.413	34	2.626.674
11	10.689.371	23	9.982.452	35	1.379.003
12	10.775.138	24	9.675.300	36	0